ベクトル、内積、外積

(教科書との対応なし)

今日のポイント

$\boxed{\text{ベクトル}}$: $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

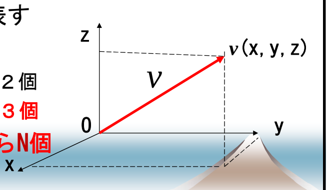
●**a**と**b**の内積と外積を求める方法？

●**a**と**b**が垂直と平行である判定方法は？

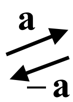
ベクトル

スカラーとベクトル

- スカラー(scalar)（質量，温度，など）
  - 大きさだけを表す：100g、12.5℃、2cm
  - 成分の数は1個
- ベクトル(vector)（速度，力，変位，等）
  - 方向を持つ大きさを表す
  - 成分の数は
    - ２次元ベクトルなら２個
    - ３次元ベクトルなら３個
    - N次元ベクトルならN個



ベクトル



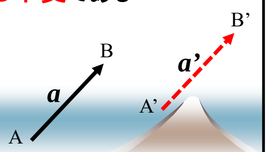
- ベクトル(vector)

物理上：速度ベクトル，力ベクトル（起点と関係あり）

●ベクトルの表示は矢印のある棒のようなもの

●矢印：方向；　棒の長さ：大きさ

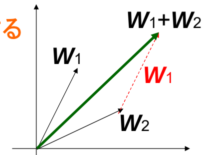
●数学上、平行移動に対し不変である



数学で対応づける

ベクトルは太い小文字で表現する

$$\mathbf{w}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\boxed{\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2}=\begin{bmatrix} 1+2 \\ 2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

三角形の関係を持つ

∵ 平行移動に対し不変

∴ W_1 と W_1 同じ

- 2つの2次元ベクトルの和は各対応要素の和
- 3次元ベクトルの和も各対応要素の和

N次元ベクトルの加減算

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_N\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_N\end{bmatrix}$$

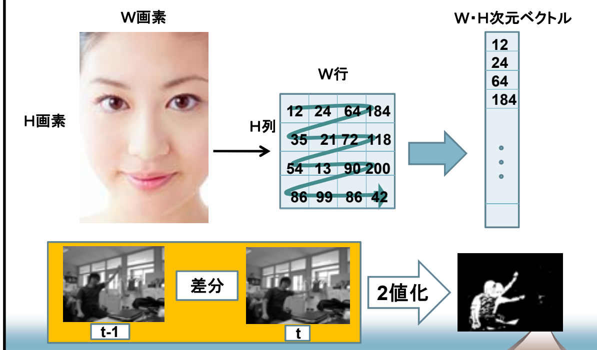
成分の数はN個

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}a_1\pm b_1\\a_2\pm b_2\\\vdots\\a_N\pm b_N\end{bmatrix}$$

→ ベクトル

◆ 2つのN次元ベクトルの和 or 差は各対応要素の和 or 差を求める

N次元ベクトルの応用例



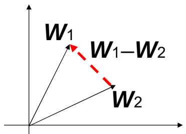
2点間の距離（ベクトルの差の長さ）

◆ 2次元の点W_1(1,2)と点W_2 (3,2)はどの程度離れているか？ ・・・2点間の距離 ⇒ 長さ

$$\mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_{11}\\w_{12}\end{bmatrix},\ \mathbf{w}_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w_{21}\\w_{22}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{d(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)}=\sqrt{(1-3)^2+(2-2)^2}$$

$$=\sqrt{(w_{11}-w_{21})^2+(w_{12}-w_{22})^2}$$



ユークリッド距離
（L2距離とも呼ぶ）

3次元ベクトルの場合3個の要素より構成される

拡張：N次元のベクトルはN個の要素より構成される

2点間の距離を求める練習

◆ N次元の点aと点bはどの程度離れているか?

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\:\\a_N\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\:\\b_N\end{bmatrix}$$

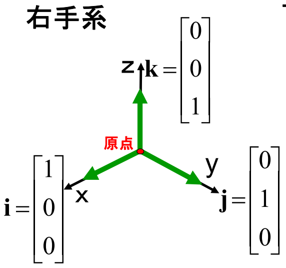
$$\boxed{d(\mathbf{a},\mathbf{b})=?}$$

（各自計算してください）

タイトル「演習レポート」、日付、学生番号、氏名を用紙の一番上に書く

3次元正規直交基底ベクトル

右手系



$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

一つの要素だけ1、残りは0
原点までの長さが

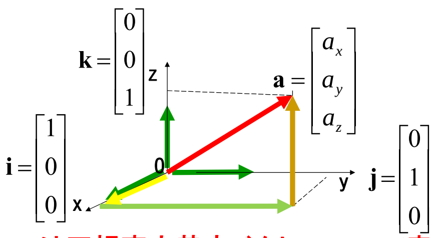
$$\|\mathbf{i}\|=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2+(0-0)^2}$$
$$\|\mathbf{j}\|=\sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2+(0-0)^2}$$
$$\|\mathbf{k}\|=\sqrt{(0-0)^2+(0-0)^2+(1-0)^2}$$

原点との距離：

$$\|\mathbf{i}\|=\|\mathbf{j}\|=\|\mathbf{k}\|=1$$

拡張：N次元ベクトル（要素がN個）
一つの要素だけ1、残りは0である
原点までの長さが1

3次元ベクトルと3次元基底ベクトル



$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix},\quad \mathbf{i}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{j}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

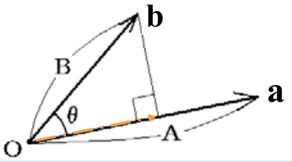
aは正規直交基底ベクトルi, j, kで表現すると

$$\boldsymbol{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}=a_x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+a_y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+a_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}$$

内積（inner product）

定義式：

ABcos θ



$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \mathrm{AB}\cos\theta = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$

計算結果は数値なので、スカラー積とも呼ぶ

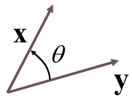
内積の一般的な計算式：

POINT!

$$\boxed{<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}=\mathbf{x}^t\mathbf{y}=\mathbf{x}'\mathbf{y}}$$

ベクトルの内積（2次元の場合）

内積の計算式より具体的な計算例：



$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}=\mathbf{x}^t\mathbf{y}=\mathbf{x}'\mathbf{y}}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+2\times1\end{bmatrix}=\boxed{4}$$

計算結果は数値（スカラー）になる

ベクトルの積（3次元の場合）

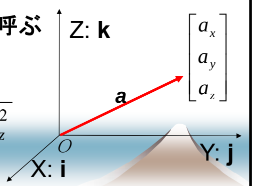
$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},$$

$$\boxed{\boxed{<\mathbf{a},\mathbf{b}>=\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=\mathbf{a}^t\mathbf{b}=\mathbf{a}'\mathbf{b}}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i}$$

ベクトルa自身の長さをノルムとも呼ぶ

自分自身の内積より求められる

$$\|\mathbf{a}\|=\sqrt{<\mathbf{a},\mathbf{a}>}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$



$$\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}$$

ベクトルの積（3次元→N次元）

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix},$$

$$\boxed{\boxed{<\mathbf{a},\mathbf{b}>=\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=\mathbf{a}^t\mathbf{b}=\mathbf{a}'\mathbf{b}}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i}$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boxed{<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\mathbf{x}\bullet\mathbf{y}=\mathbf{x}^t\mathbf{y}=\mathbf{x}'\mathbf{y}}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}$$

行ベクトルと列ベクトルの積
内積（スカラー），ノルム（長さ）

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=\mathbf{a}^t\mathbf{b}=\mathbf{a}'\mathbf{b}=\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \text{積和}$$

→共分散，相関

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}=\mathbf{a}^t\mathbf{a}=\mathbf{a}'\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2 \text{要素の２乗和}$$

→平方根,ベクトルの長さ（標準偏差）

直交ベクトル ⇔ 内積=0

ベクトルの内積が0⇒ $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta=0$

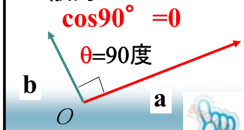
‖

ベクトルは直交（orthogonal）している

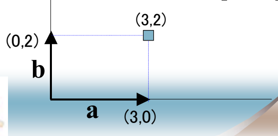
この2つのベクトルのなす角度θは90度

一般的に：

cos90° =0



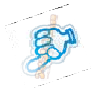
例えば： $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=\begin{bmatrix}3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=0$



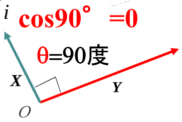
n次元ベクトルx,yの内積

$$< \mathbf{x},\mathbf{y} >= \mathbf{x}\bullet\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y} = \mathbf{x}'\mathbf{y}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$



cos90°　=0



1行　X　1列　→　スカラー値　になる

内積の結果＝0 ⟺ 二つのベクトルが直交

一般的な正規直交基底

◆ 正規直交基底：互いに直交する単位ベクトルの集合 $\Phi=\{\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\cdots,\boldsymbol{\varphi}_N\}$

$$\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \|\boldsymbol{\varphi}_i\|=1$$

$$\varphi_i \bullet \varphi_i = \|\varphi_i\|\|\varphi_i\|\cos\theta = 1\times1\times\cos 0^o = 1$$

$$\varphi_i \bullet \varphi_j = \|\varphi_i\|\|\varphi_j\|\cos\theta = 1\times1\times\cos 90^o = 0$$

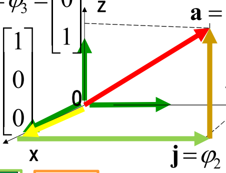
直交展開（＋α）

◆ 基底と同じ*n*次元のベクトル**x**は、次式で表現できる。(直交展開)

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\varphi}_i)\boldsymbol{\varphi}_i$$

正規直交基底

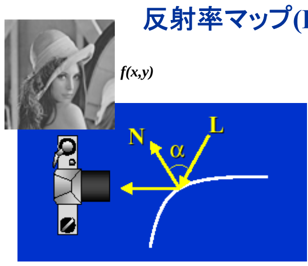
$$\mathbf{k}=\varphi_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{i}=\varphi_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{j}=\varphi_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}$$



$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = a_x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + a_y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + a_z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}$$

内積が画像処理での応用

反射率マップ(Reflectance Map)



理想的、強い仮定：
画像内の明るさ*f(x,y)*は入射光Lと物体表面の法線Nの間の角度αだけに依存

$$f(x,y) = N \bullet L = N^t L = \begin{bmatrix} n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix}$$

色々なパターン認識の時も良く内積の計算結果を利用

内積を利用した2点間の距離の高速計算法（＋α）

xとyはそれぞれN次元のベクトル：

$$d^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = < \mathbf{x},\mathbf{x} > -2 < \mathbf{x},\mathbf{y} > + < \mathbf{y},\mathbf{y} >$$

$$\Updownarrow$$

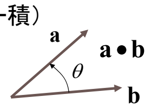
元の定義式：$d^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2$

（講義後、各自で証明してください）

内積の性質（＋α）

ベクトルの内積(Inner product；スカラー積）

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$



基底ベクトルの内積

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{i}\bullet\mathbf{i} = \mathbf{j}\bullet\mathbf{j} = \mathbf{k}\bullet\mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i}\bullet\mathbf{j} = \mathbf{j}\bullet\mathbf{k} = \mathbf{k}\bullet\mathbf{i} = 0 \end{array}}$$

講義後、各自で証明してください

3次元ベクトルの内積の成分による表現

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\bullet(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})$$
$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

[内積の性質]

a)交換性　$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \mathbf{b}\bullet\mathbf{a}$

内積は交換可

b)分配性　$\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\bullet\mathbf{b} + \mathbf{a}\bullet\mathbf{c}$

外積

外積の幾何学的性質(Out product)

外積: $c = a \times b$

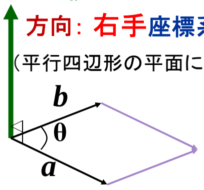
●大きさ(平行四辺形の面積)

$c = \|a\|\,\|b\|\sin\theta$

c : 外積のベクトル

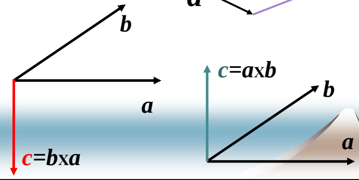
方向: 右手座標系

(平行四辺形の平面に直交)



●外積の演算結果はベクトルで、ベクトル積とも呼ぶ

◎右ねじ順



平行ベクトル ⇔ 外積=0

ベクトルの外積が0⇒ $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta = 0$

||

ベクトルは平行(parallel)している

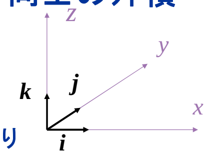
この2つのベクトルのなす角度θは0 or 180度

◎3次元基底ベクトル自身の外積

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$ (零ベクトル)

同じベクトル同士は必ずなす角度が0度(sin0=0)から

異なる3次元基底ベクトル同士の外積



◎右ねじ順の二つの基底ベクトルより3次元座標系のもう一つの基底ベクトルを求められる

$i \times j = k,\ \ j \times k = i,\ \ k \times i = j$

◎右ねじ順に従わない二つの基底ベクトルよりもう一つの基底ベクトルと反対方向の基底ベクトルを求められる

$j \times i = -k,\quad k \times j = -i,\quad i \times k = -j$

3次元ベクトルの外積$a \times b$

$$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$

$i \times j = k,\ \ j \times k = i,\ \ k \times i = j$

$j \times i = -k,\quad k \times j = -i,\quad i \times k = -j$

外積の分配性を利用す ると:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \left(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\right)\times\left(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}\right)$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

$$= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} = \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

講義後各自で証明してください

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y \quad a_z b_x - a_x b_z \quad a_x b_y - a_y b_x)^T$$

3次元ベクトルの外積の定義・課題

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$を求めなさい。

タイトル「演習レポート」

日付、学生番号、氏名を用紙の一番上に書く

内積と外積の組み合わせ

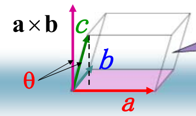
平行6面体の体積とスカラー3重積

3つの3次元ベクトル$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$に対して、外積してから内積：

$$\boxed{<\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}>}$$

3つの3次元ベクトル$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$を辺とするような
平行6面体の体積に等しい

このスカラーを求める演算を**スカラー3重積**と呼ぶ



c と $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ のなす角度をθとすると、平行6面体の高さはCcosθと表せる。

内積と外積の公式(+α)

・**スカラー3重積**

$$<\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}> = \vec{a}\times\vec{b}\bullet\vec{c} = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\bullet\vec{c} = \vec{c}\bullet\vec{a}\times\vec{b}$$

$$= \vec{b}\times\vec{c}\bullet\vec{a} = \vec{a}\bullet\vec{b}\times\vec{c}$$

$$= \vec{c}\times\vec{a}\bullet\vec{b} = \vec{b}\bullet\vec{c}\times\vec{a}$$

これは3つの3次元ベクトルで構成された平行斜方体の体積となる。

・**ベクトル3重積**

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = (\vec{a}\bullet\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\bullet\vec{b})\vec{c}$$

予習テスト

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

●$\mathbf{A}$のトレースと行列式を求めなさい

●$\mathbf{A}$の階数（ランク）は？

●$\mathbf{A}$の逆行列は？

（各自計算してください）

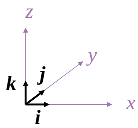
タイトル「演習レポート」、日付、学生番号、氏名を用紙の一番上に書く

宿題1-1

（1） $\boldsymbol{a} = 3\,\boldsymbol{i} + 2\,\boldsymbol{j}$ 　 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = ?$

$\boldsymbol{b} = 5\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j}$ 　 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = ?$

$3\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = ?$



（2）平面ベクトル $\mathbf{a} = (\sqrt{3},-1), \mathbf{b} = (\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ を既知とする。

問1：$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ であることを証明しなさい。

問2：$\mathbf{x} = \mathbf{a} + (t^2-3)\mathbf{b}, \quad \mathbf{y} = -k\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ 、かつ、$\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ の関係が満足できる同時に零ではない実数tとkが存在すると、その関数関係 $k = f(t)$ を求めなさい。

（3） aとbは非ゼロのベクトルである。かつ、a+3bと7a－5b垂直、a－4bと7a－2b垂直、aとbのなす角を求めなさい。

レポートの提出方法

◆演習レポート

タイトル「演習レポート」、日付、学生番号、氏名を用紙の一番上に書く

◆課題レポート

・タイトル「課題レポート」、出題日、学生番号、氏名を用紙の一番上に書く

・2ページ以上になる場合はホッチキスで留める

・A4サイズの用紙を使用

・一度に複数の課題レポートを提出する場合は出題日ごとに別々に綴じる

ベクトル、内積、外積のまとめテスト

ベクトル：$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix};\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

●$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の内積と外積を求めなさい

●$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$が垂直と平行である判定方法は？

（各自計算してください）

タイトル「出席レポート」、日付、学籍番号、氏名を用紙の一番上に書く