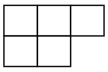
hook length formula と lattice path method*

田川 裕之 （和歌山大学教育学部）

目 次

*2006 年 2 月に筑波大学で実施した集中講義の原稿. 2008 年 6 月 :§5 を修正. 2016 年 6 月：問 6 の解答を修正.

1　序

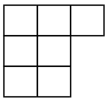
問 1. 図形の各マス目に 1,2,3,4,5 を次の条件 (1),(2) を満たすように一つずつ入れる方法は何通りあるか？

(1) 左右に接しているマス目に入っている数は右の方が大きい.

(2) 上下に接しているマス目に入っている数は下の方が大きい.

解答: 条件を満たす入れ方は次の５通り.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}$$

問 2. 図形の各マス目に 1,2,3,4,5,6,7 を問 1 と同様の条件 (1),(2) を満たすように一つずつ入れる方法は何通りあるか？

本稿では, このような問題の解答となる等式を拡張し, できるだけ厳密に証明することを目的とする.

まず, 問題の定式化と目的とする等式の紹介から始める.

以下, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 0 以上の整数全体の集合を $\mathbb{N}$, 自然数全体の集合を $\mathbb{P}$ で表し, 集合 X に対して X の元の個数を $|X|$ で表すこととする.

定義 1.1 (partition)**.** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{P}^r$ に対して

$$\lambda : \text{partition} \Leftrightarrow \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$$

で定義する.
partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ に対して

$$|\lambda| := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$$

とおき, $|\lambda| = n$ のとき λ を n の partition と呼び

$$\lambda \vdash n$$

で表す.
$n \in \mathbb{P}$ に対して

$$\mathrm{Par}(n) := \{\lambda; \lambda \vdash n\}$$

とおく.

例 1.2.

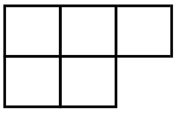
$$\begin{aligned} \mathrm{Par}(1) &= \{(1)\}, \\ \mathrm{Par}(2) &= \{(2), (1,1)\}, \\ \mathrm{Par}(3) &= \{(3), (2,1), (1,1,1)\}, \\ \mathrm{Par}(4) &= \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)\} \end{aligned}$$

問 3. Par(5), Par(6) を記述せよ. |Par(10)|, |Par(20)| は？[1]

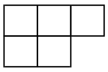
[1]コンピュータを用いてプログラミングするのが懸命と思われる.

定義 1.3 (Young diagram)**.** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$ とする.
λ_1 個のマス目□を第１行目に, λ_2 個のマス目を第２行目にといった具合に合計 n 個のマス目を左上隅詰めで置いた図形を shape λ のヤング図形と呼ぶ. ただし, マス目の大きさは全て同じとする[2].

例 1.4. shape $(3, 2)$ のヤング図形は次のもの



例えば

$(3, 2) \longleftrightarrow$  $\longleftrightarrow \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)\}$

といったように partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, shape λ のヤング図形,

$$\{(i,j); 1 \le i \le r, 1 \le j \le \lambda_i\}$$

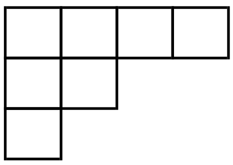
は１対１に対応しているので, 以後この３種類を同一視して考える.

定義 1.5 (conjugate)**.** $\lambda = (\lambda_1(=: k), \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, $i \in \mathbb{P}$, $i \le k$ に対して

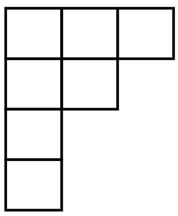
$$\begin{aligned} \lambda'_i &:= |\{j \in \mathbb{P}; \lambda_j \ge i\}|, \\ \lambda' &:= (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_k) \end{aligned}$$

とおき, λ' を λ の conjugate(共役) と呼ぶ.

例 1.6.

$\lambda = (4, 2, 1) \leftrightarrow$ 

に対して

$\lambda' = (3, 2, 1, 1) \leftrightarrow$ 

ヤング図形では対角線に関して折り返したものが conjugate に対応している.

---
[2]マス目は「正方形の箱」「箱」「四角」等で呼ばれることもある

定義 1.7 (tableau)**.** $\lambda \vdash n$ に対して

$$\mathrm{Tab}(\lambda) := \text{shape } \lambda \text{ のヤング図形の各マス目に整数を}$$
$$\text{一つずついれたもの全体の集合}$$

とおき, $\mathrm{Tab}(\lambda)$ の元を shape λ の tableau（盤）と呼ぶことにする．また, $T \in \mathrm{Tab}(\lambda)$, $(i,j) \in \lambda$ に対して

$$T_{i,j} := T \text{ の } i \text{ 行 } j \text{ 列のマス目に入っている整数}$$

とする.

例 1.8.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 0 \\ \hline -1 & 2 & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

は shape $(3,2)$ の tableau で, $T_{1,1} = 1$, $T_{1,2} = 3$, $T_{1,3} = 0$, $T_{2,1} = -1$, $T_{2,2} = 2$.

定義 1.9 (standard tableau)**.** $\lambda \vdash n$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{YTab}(\lambda) &:= \{T \in \mathrm{Tab}(\lambda);\ \{T_{i,j}; (i,j) \in \lambda\} = \{1,2,\ldots,n\}\}, \\
\mathrm{STab}(\lambda) &:= \{T \in \mathrm{YTab}(\lambda);\ T_{i,j} < T_{i,j+1} \text{ if } (i,j),(i,j+1) \in \lambda, \\
&\qquad\qquad\qquad\quad\ \ T_{i,j} < T_{i+1,j} \text{ if } (i,j),(i+1,j) \in \lambda\}
\end{aligned}$$

とおき, $\mathrm{STab}(\lambda)$ の元を shape λ の standard tableau（標準盤）と呼ぶ[3].

例 1.10.

$$\mathrm{STab}((3,2)) = \{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\ \hline 2&4&\\ \cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\ \hline 3&4&\\ \cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5&\\ \cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\ \hline 3&5&\\ \cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\ \hline 4&5&\\ \cline{1-2}\end{array}\}$$

問 4. $\mathrm{STab}((3,2,1))$ の元を全て列挙せよ。

一般に次が知られている.

定理 1.11 (hook length formula)**.** $\lambda \vdash n$ とする．$(i,j) \in \lambda$ に対して

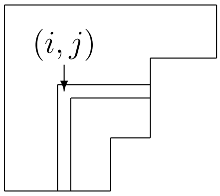
$$h_\lambda((i,j)) := \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$$

とおく．以下, 括弧の 2 重利用を避けて $h_\lambda((i,j))$ を $h_\lambda(i,j)$ で表すこともある.
$h_\lambda(i,j)$ は λ の (i,j) に対する hook length と呼ばれる.
このとき次が成立する.

$$|\mathrm{STab}(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_\lambda(i,j)}. \tag{1}$$

[3]standard Young tableau と呼ばれるときもある.

注意 1.12. $h_\lambda(i,j)$ は (i,j) の右にある箱と, 下にある箱の数を足したものに 1 を加えたもので, 実際は次の鉤 (hook) の形の部分にある箱の数を数えている.



例 1.13. $\lambda = (3,2) \vdash 5$ の hook length を対応する箱に書き入れると

4	3	1
2	1	

従って

$$\frac{5!}{4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 5$$

となり先の例の結果と一致している.

問 5. $|\mathrm{STab}((6,5,3,1,1))|$ は何になるか？定理 1.11 を用いて計算せよ.

注意 1.14. n 次対称群の既約表現は n の partition λ と一対一に対応しており, λ に対する既約表現の次元は $|\mathrm{STab}(\lambda)|$ と一致することが知られている.

この講義の目的は 定理 1.11 の拡張したもの (i.e. q-analogue した等式) をできるだけ厳密に証明することである.

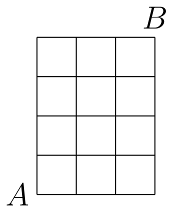
2　q-analogue の世界

ここでは q-analogue とはいったいどういったものなのかについて解説し, 定理. 1.11 の q-analogue を行うことを目的とする.

2.1　2 項係数の q-analogue

まず, 2 項係数の q-analogue を通して q-analogue とはいったいどういったものなのかといったことについて述べる.

次のような格子を考える.



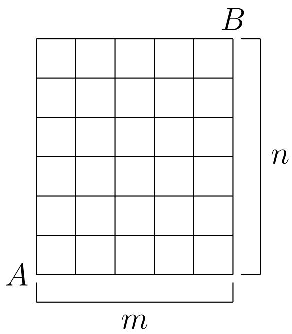
$$A \text{ から } B \text{ への最短路の数} = {}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

以後 $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ に対して

$$\binom{a}{b} := \frac{a!}{b!(a-b)!} (= {}_aC_b)$$

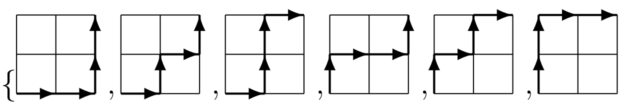
と書くことにする.

記号 2.1. $m, n \in \mathbb{N}$ に対して



の A から B への最短路全体の集合を $P(m,n)$ で表す.

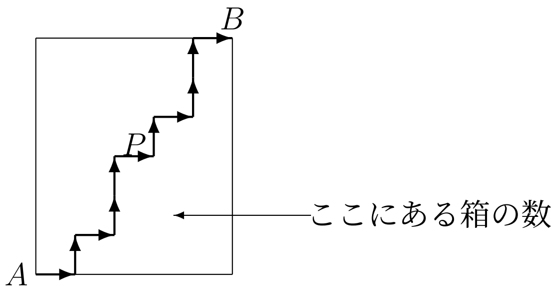
例 2.2.

$P(2,2) = \{$  $\}$

注意 2.3.

$$|P(m,n)| = \binom{m+n}{m}.$$

記号 2.4. $P \in P(m,n)$ に対して

$w(P) :=$ 

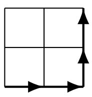
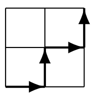
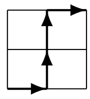
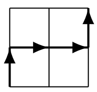
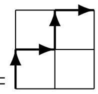
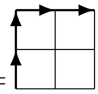
で定義し,

$$F(m,n;q) := \sum_{P \in P(m,n)} q^{w(P)}$$

とおく[4].

例 2.5.

$P(2,2) =$

$\{P_1 :=$  $, P_2 :=$  $, P_3 :=$  $, P_4 :=$  $, P_5 :=$  $, P_6 :=$  $\}$

であるので

$$w(P_1) = 0, w(P_2) = 1, w(P_3) = 2, w(P_4) = 2, w(P_5) = 3, w(P_6) = 4.$$

よって

$$F(2,2;q) = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4 = (1+q+q^2)(1+q^2)$$

そこで, まず問題となるのは一般の $m, n \in \{0, 1, 2, \ldots, \}$ に対して $F(m,n;q)$ はどのようにかけるか？ということである.

注意 2.6. $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

(i)

$$F(0,0;q) = F(0,n;q) = F(m,0;q) = 1$$

(ii)

$$F(m,n;1) = \sum_{P \in P(m,n)} 1^{w(P)} = \sum_{P \in P(m,n)} 1 = |P(m,n)| = \binom{m+n}{m}$$

---

[4] $F(m,n;q)$: q-変数の多項式で, q:複素数とする.

(iii) $P(m,n)$ の元は

$$\{(a_1,a_2,\ldots,a_m)\in\mathbb{Z}^m; 0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_m\le n\}$$

の元と 1 対 1 に対応し, $P\in P(m,n)$ と $(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ が対応しているときには

$$w(P)=a_1+a_2+\cdots+a_m$$

であるので

$$F(m,n;q)=\sum_{0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_m\le n} q^{a_1+a_2+\cdots+a_m}$$

となっている.

注意 2.6-(ii) に関連した問題として...

問 6.

$$|\{P\in P(m,n); w(P):\text{偶数}\}|=?$$

☆ 注意の (iii) より, m,n の両方もしくは, m が小さいときには $F(m,n;q)$ は根性で計算できるが, 一般にとなるとちょっと困難と思われる. そこで, 整数及び二項係数の q-analogue と呼ばれるものを導入し, 一般にどのようにかけるのかを考えてみよう.

定義 2.7 (q-整数)**.** $n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$[n]:=\frac{1-q^n}{1-q}$$

とおく[5]として $[n]$ は 「q-整数の n」もしくは「q-整数 n」と呼ばれる.

例 2.8.

$$\begin{aligned}
[3]&=\frac{1-q^3}{1-q}=1+q+q^2,\\
[0]&=\frac{1-q^0}{1-q}=0,\\
[-3]&=\frac{1-q^{-3}}{1-q}=-q^{-3}\frac{1-q^3}{1-q}=-q^{-3}(1+q+q^2)=-(q^{-1}+q^{-2}+q^{-3}),\\
1+q^2&=\frac{[4]}{[2]},\\
1+q^3&=\frac{[6]}{[3]},\\
1+q^5+q^{10}&=\frac{[15]}{[5]},\\
1-q+q^2-q^3+q^4&=\frac{[10]}{[5][2]}.
\end{aligned}$$

[5] q に実際に複素数 c を代入して考え時には極限として考える. i.e. $[n]|_{q=c}:=\lim_{q\to c}[n]$. また, ここでは $0^0:=1$ として考えることとする

一般に $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$[a] = \begin{cases} 1 + q + q^2 + \cdots + q^{a-1} & \text{if } a > 0, \\ 0 & \text{if } a = 0, \\ -(q^{-1} + q^{-2} + \cdots + q^{a}) & \text{if } a < 0, \end{cases}$$
$$[a]|_{q=1} = a.$$

定義 2.9 (q- 2 項係数)**.** $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ に対して

$$\begin{aligned} [a]! &:= \begin{cases} 1 & \text{if } a = 0, \\ [a][a-1]! & \text{if } a > 0, \end{cases} \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &:= \frac{[a]!}{[b]![a-b]!} (= \begin{bmatrix} a \\ a-b \end{bmatrix}) \end{aligned}$$

とおく. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ といったものは q- 2 項係数と呼ばれている.

例 2.10.

$$\begin{aligned} [3]! &= (1+q)(1+q+q^2), \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} &= \frac{[4][3]}{[2][1]} = (1+q+q^2)(1+q^2) \end{aligned}$$

一般に

$$[a]!|_{q=1} = a!, \qquad \left. \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right|_{q=1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

問 7. 次を q-整数を用いて表せ.

$$1 + q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6 + q^7, \quad 1 - q + q^3 - q^4 + q^5 - q^7 + q^8$$

次は定義に従って計算すれば容易に成立が示せる.

補題 2.11. $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ に対して

(i) $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = 1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$.

(ii) $a > b > 0$ のとき
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-1 \\ b \end{bmatrix} + q^{a-b} \begin{bmatrix} a-1 \\ b-1 \end{bmatrix}$$

($\because$) (i) は定義より成立しているので (ii) のみを示す.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}a-1\\b\end{bmatrix}+q^{a-b}\begin{bmatrix}a-1\\b-1\end{bmatrix} &= \frac{[a-1]!}{[b]![a-b-1]!}+\frac{q^{a-b}[a-1]!}{[b-1]![a-b]!}\\ &= \frac{[a-1]!([a-b]+q^{a-b}[b])}{[b]![a-b]!}\\ &= \frac{[a-1]![a]}{[b]![a-b]!}\\ &= \frac{[a]!}{[b]![a-b]!}\\ &= \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}. \qquad \square\end{aligned}$$

一般に $F(m,n;q)$ は次のように書ける.

命題 2.12. $m,n\in\mathbb{N}$ に対して

$$F(m,n;q)=\begin{bmatrix}m+n\\m\end{bmatrix}.$$

($\because$) 次の 2 つの場合に分けて証明する.

(i) $m=0$ or $n=0$ のとき,

(ii) $m,n>0$ のとき.

(i) のときは両辺共に 1 となり成立.
(ii) のとき.
$m+n$ に関する帰納法により示す.
$m+n=2$ (即ち $m=n=1$) のとき

$$F(1,1;q)=1+q=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

となり成立.
$m+n=k-1$ まで成立したと仮定し, $m+n=k$ のときを示す ($k\geq 3$).
まず, $F(m,n;q)$ の定義より

$$F(m,n;q)=F(m,n-1;q)+q^nF(m-1,n;q)$$

といってもいいのだが, 注意 2.6-(iii) を用いると

$$
\begin{aligned}
F(m,n;q) &= \sum_{0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_m\le n} q^{a_1+a_2+\cdots+a_m} \\
&= \sum_{0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_m< n} q^{a_1+a_2+\cdots+a_m} + \sum_{0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_m= n} q^{a_1+a_2+\cdots+a_m} \\
&= \sum_{0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_m\le n-1} q^{a_1+a_2+\cdots+a_m} + \sum_{0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_{m-1}\le n} q^n q^{a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}} \\
&= F(m,n-1;q)+q^nF(m-1,n;q).
\end{aligned}
$$

従って, 帰納法の仮定と (i), (ii) の結果, 補題 2.11-(ii) より

$$
F(m,n;q)=\begin{bmatrix} m+n-1 \\ m \end{bmatrix} + q^n \begin{bmatrix} m+n-1 \\ m-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}.
$$

従って数学的帰納法により証明できた. □

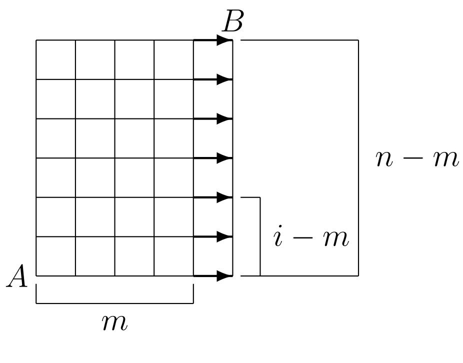
次に自然数の和の公式の q-analogue について述べよう.

まず, 次が成立している.

命題 2.13. $m,n\in\mathbb{N}$, $m\le n$ に対して

$$
\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}=\binom{n+1}{m+1}. \tag{2}
$$

(∵) 次の図の A から B への最短路は矢印のどれかを必ず 1 度だけ通るのでそれにより分けて考えるとほぼ明らか.



命題 2.13 より次が成立している.

系 2.14. $m,n\in\mathbb{N}$ とする.

(i) $n\ge m$ のとき

$$
\sum_{i=m}^{n} i(i-1)(i-2)\dots(i-m+1)=\frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-m+1)}{m+1}.
$$

(ii) $n \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i =& \frac{n(n+1)}{2}, && (3)\\
\sum_{i=1}^{n} i^2 =& \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, && (4)\\
\sum_{i=1}^{n} i^3 =& \frac{n^2(n+1)^2}{4}, && (5)\\
\sum_{i=1}^{n} i^4 =& \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. && (6)
\end{aligned}$$

($\because$) (i) は (2) の両辺に $m!$ をかけて整理すると得られる.
(ii) の (3) は (i) において $m=1$ とすれば得られるので, (4) を示そう.
まず, (i) において $m=2$ とおくと

$$\sum_{i=2}^{n} i(i-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

即ち

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

従って,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} i^2 &= \sum_{i=2}^{n}(i(i-1)+i)\\
&= \sum_{i=2}^{n} i(i-1) + \sum_{i=1}^{n} i\\
&= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

となり成立. (5), (6) も同様に示せる[6]. $\square$

問 8. $\sum_{i=1}^{n} i^5$ を n の式で表せ[7].

次にこれの q-analogue をしてみよう.

先の図より次の成立は容易にわかる.

[6]原理的には根性があれば $\sum_{i=1}^{n} k^{10}$ とか $\sum_{i=1} k^{100}$ といったものの公式も作成可能.
[7]$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

命題 2.15. $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ に対して

$$\sum_{i=m}^{n} q^{i-m} \begin{bmatrix} i \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}.$$

上式において, $m = 1$ とすると

$$\sum_{i=1}^{n} q^{i-1}[i] = \frac{[n][n+1]}{[2]}.$$

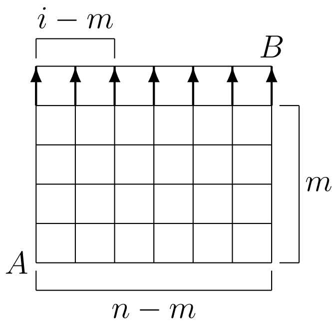
例えば, $n = 3$ のときは

$$[1] + q[2] + q^2[3] = \frac{[3][4]}{[2]}.$$

これは等式

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

の q-analogue の「一つ」である.
何故「一つ」なのかというと例えば,



といったように考えると

$$\sum_{i=m}^{n} q^{(m+1)(n-i)} \begin{bmatrix} i \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}$$

となり, $m = 1$ とすると

$$\sum_{i=1}^{n} q^{2(n-i)}[i] = \frac{[n][n+1]}{[2]}.$$

特に $n = 3$ のときには

$$q^4[1] + q^2[2] + [3] = \frac{[3][4]}{[2]}$$

となるので先に作った q-analogue とは異なる等式である.

「q-analogue は一つとは限らない.」

問 9. 等式

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

の q-analogue を作れ．また，他の系 2.14 での等式や 2 項係数の関連した等式の q-analogue を考えてみよ．

例えば，2 項展開 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ の q-analogue の一つとして

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\dots(1+q^{n-1}x) = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

といった等式が知られている[8]．

[8]参照：数学のたのしみ 2「q 解析学のルネサンス」日本評論社，「群論の進化」堀田，渡辺，庄司，三町著 朝倉書店)．

2.2 q-analogue の効能

この節では「q-analogue することにより増えた情報」の吸い出し方について少しだけ述べてみよう.

P: 有限集合, $w : P \to \mathbb{Z}$ に対して[9]

$$F(P,q) := \sum_{x \in P} q^{w(x)}$$

とおき, さらに

$$P_0 := \{x \in P; w(x) : \text{偶数}\}, \quad P_1 := \{x \in P; w(x) : \text{奇数}\}$$

とおくと, 次の成立が容易に分かる.

$$|P| = F(P,1), \quad |P_0| = \frac{F(P,1) + F(P,-1)}{2}, \quad |P_1| = \frac{F(P,1) - F(P,-1)}{2}.$$

さらに,

$$F(P,q,t) := \sum_{x \in P} (qt)^{w(x)}$$

とおくと

$$F(P_0,q) = \frac{F(P,q,1) + F(P,q,-1)}{2}, \quad F(P_1,q) = \frac{F(P,q,1) - F(P,q,-1)}{2}$$

とも書ける.
また, この $F(P_0,q)$, $F(P_1,q)$ を経由して考えると

$$\begin{aligned}
|\{x \in P; w(x) \equiv 0 \pmod 4\}| &= \frac{F(P_0,1) + F(P_0,i)}{2} \\
&= \frac{F(P,1) + F(P,-1) + F(P,i) + F(P,-i)}{4}, \\
|\{x \in P; w(x) \equiv 1 \pmod 4\}| &= \frac{iF(P_1,1) + F(P_1,i)}{2i} \\
&= \frac{iF(P,1) - iF(P,-1) + F(P,i) - F(P,-i)}{4i}, \\
|\{x \in P; w(x) \equiv 2 \pmod 4\}| &= \frac{F(P_0,1) - F(P_0,i)}{2} \\
&= \frac{F(P,1) + F(P,-1) - F(P,i) - F(P,-i)}{4}, \\
|\{x \in P; w(x) \equiv 3 \pmod 4\}| &= \frac{iF(P_1,1) - F(P_1,i)}{2i} \\
&= \frac{iF(P,1) - iF(P,-1) - F(P,i) + F(P,-i)}{4i}
\end{aligned}$$

[9] このような写像 w は P の weight と呼ばれている.

となる[10]．このままでは見にくいので少しだけ整理すると

$$
\begin{aligned}
|\{x \in P; w(x) \equiv 0 \pmod 4\}| &= \frac{F(P,1)+F(P,i)+F(P,-1)+F(P,-i)}{4},\\
|\{x \in P; w(x) \equiv 1 \pmod 4\}| &= \frac{F(P,1)-iF(P,i)-F(P,-1)+iF(P,-i)}{4},\\
|\{x \in P; w(x) \equiv 2 \pmod 4\}| &= \frac{F(P,1)-F(P,i)+F(P,-1)-F(P,-i)}{4},\\
|\{x \in P; w(x) \equiv 3 \pmod 4\}| &= \frac{F(P,1)+iF(P,i)-F(P,-1)-iF(P,-i)}{4}.
\end{aligned}
$$

一般に次が成立する．

命題 2.16. P, w, $F(P,q)$ はこの節の最初と同じとする．$m \geq 2$, $0 \leq r \leq m-1$ に対して

$$\tilde{P}_r := \{x \in P; w(x) \equiv r \pmod m\}, \quad \zeta := e^{\frac{2\pi i}{m}}$$

とおくと

$$|\tilde{P}_r| = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} F(P,\zeta^k).$$

問 10. 命題 2.16 を証明せよ．さらに $F(\tilde{P}_r, q)$ が何になるか予想して証明せよ[11]．

q- 2 項係数に関しては例えば次が成立している[12]．

命題 2.17.

$$\left.\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}\right|_{q=-1} = \begin{cases} 0 & \text{if } m,\ n\text{: 奇数}, \\ \binom{\lfloor m/2\rfloor + \lfloor n/2\rfloor}{\lfloor n/2\rfloor} & \text{otherwise}. \end{cases}$$

ただし，$\lfloor r\rfloor$ は r を超えない最大の整数（i.e. ガウス記号）とする．さらに一般形については 7.8 節参照．

命題 2.16, 命題 2.17 を用いると問 6 の解として次が得られる．

$$|\{P \in P(m,n); w(P)\text{:偶数}\}| = \begin{cases} \frac{1}{2}\binom{m+n}{n} & \text{if } m,\ n\text{: 奇数}, \\ \frac{1}{2}\left(\binom{m+n}{n} + \binom{\lfloor m/2\rfloor + \lfloor n/2\rfloor}{\lfloor n/2\rfloor}\right) & \text{otherwise}. \end{cases}$$

問 11. 命題 2.17 を証明せよ[13]．

[10] $a \equiv r \pmod m$ は a を m で割った余りが r, i.e. $\exists b \in \mathbb{Z}$ s.t. $a = bm + r$, $0 \leq r \leq m-1$, を意味する．

[11] 解答は 7.1 節参照

[12] 2005 年度ゼミ生の坂本匡史君の実験による．

[13] Hint: 例えば, q- 2 項係数に関する漸化式を用いて, m, n を偶数と奇数に場合分けして帰納的に示すとよい

2.3 q-hook length formula

ここでは 定理 1.11 の q-analogue となる等式の紹介を目的とする.

定義 2.18 (対称群). $n \in \mathbb{P}$ に対して

$$S_n := \{\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}; \sigma\text{: 全単射}\}$$

とおき, S_n を n 次対称群と呼ぶ.
$\sigma \in S_n$ は次の形で表されることが多い.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

i.e. $\sigma \in S_5$ が

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 5, \sigma(5) = 4$$

のとき, σ は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

で表されるということである.
この記法に従うと

$$S_3 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

記号 2.19. $\lambda \vdash n$, $T \in \mathrm{YTab}(\lambda)$ に対して, $f_T : \lambda \to \{1, 2, \ldots, n\}$ を

$$f_T((i, j)) := T_{i,j}$$

で定義する.

例 2.20.

$$T_1 := \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array} \in \mathrm{STab}((3, 2))$$

とすると $f_{T_1} : \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2)\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$f_{T_1}((1, 1)) = 1, f_{T_1}((1, 2)) = 3, f_{T_1}((1, 3)) = 5, f_{T_1}((2, 1)) = 2, f_{T_1}((2, 2)) = 4.$$

注意 2.21. $T, T' \in \mathrm{YTab}(\lambda)$ に対して

$$f_T \circ f_{T'}^{-1} \in S_n$$

(i.e. T' の順番に T を読んでいったもの).

定義 2.22 (major index)**.** $\sigma \in S_n$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して

$$\begin{aligned} D(\sigma) &:= \{i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}; \sigma(i) > \sigma(i+1)\}, \\ \mathrm{maj}(\sigma) &:= \sum_{i \in D(\sigma)} i. \end{aligned}$$

$\mathrm{maj}(\sigma)$ は σ の major index と呼ばれている.

例 2.23.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

のとき

$$D(\sigma) = \{1, 3, 5, 6\}, \quad \mathrm{maj}(\sigma) = 15.$$

記号 2.24. $\lambda \vdash n$, $T \in \mathrm{STab}(\lambda)$ に対して $T^* \in \mathrm{YTab}(\lambda)$ を

$$T^*_{ij} := n + 1 - T_{ij}$$

で定義する.

例 2.25.

$$T_1 := \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}, T_2 := \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}, T_3 := \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}, T_4 := \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}, T_5 := \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}$$

とおくと

$$T_1^* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&3&1\\\hline 4&2\\\cline{1-2}\end{array}, T_2^* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&4&1\\\hline 3&2\\\cline{1-2}\end{array}, T_3^* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&3&2\\\hline 4&1\\\cline{1-2}\end{array}, T_4^* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&4&2\\\hline 3&1\\\cline{1-2}\end{array}, T_5^* = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5&4&3\\\hline 2&1\\\cline{1-2}\end{array}$$

であり, $T_0 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline 5&4\\\cline{1-2}\end{array}$ に対して

$$\begin{array}{rc} & \mathrm{maj} \\ f_{T_0} \circ f_{T_1^*}^{-1} = 14253, & 6 \\ f_{T_0} \circ f_{T_2^*}^{-1} = 14523, & 3 \\ f_{T_0} \circ f_{T_3^*}^{-1} = 41253, & 5 \\ f_{T_0} \circ f_{T_4^*}^{-1} = 41523, & 4 \\ f_{T_0} \circ f_{T_5^*}^{-1} = 45123, & 2 \end{array}$$

従って

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathrm{STab}((3,2))} q^{\mathrm{maj}(f_{T_0} \circ f_{T^*}^{-1})} &= q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 \\ &= q^2[5] \\ &= \frac{q^2[5]!}{[4][3][1][2][1]} \\ &= \frac{q^2[|(3,2)|]!}{\prod_{x \in (3,2)} [h_{(3,2)}(x)]}. \end{aligned}$$

一般に次が知られている.

定理 2.26 (q-hook length formula)**.** $T_0 \in \mathrm{YTab}(\lambda)$ を

$$(T_0)_{i,j} := \sum_{k=1}^{i} \lambda_k - j + 1$$

で定義し, $b(\lambda) = \sum_{i \geq 1}(i-1)\lambda_i$ とおくと

$$\sum_{T \in \mathrm{STab}(\lambda)} q^{\mathrm{maj}(f_{T_0} \circ f_{T^*}^{-1})} = q^{b(\lambda)} \frac{[|\lambda|]!}{\prod_{x \in \lambda}[h_\lambda(x)]} \tag{7}$$

特に 定理 2.26 において $q = 1$ とおくと 定理 1.11 がでてくるので, 定理 2.26 を示すとよい.

問 12. T_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ を 例 2.25 で定義したものとする.
$i = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して $\sum_{T \in \mathrm{STab}((3,2))} q^{\mathrm{maj}(f_{T_i^*} \circ f_{T^*}^{-1})}$ を計算してみよ.

一般に, $T_0 \in \mathrm{STab}(\lambda)$ のとき

$$\sum_{T \in \mathrm{STab}(\lambda)} q^{\mathrm{maj}(f_{T_0^*} \circ f_{T^*}^{-1})} = \frac{[|\lambda|]!}{\prod_{x \in \lambda}[h_\lambda(x)]} \tag{8}$$

となることも知られている[14].

注意 2.27. 定理 2.26 を示すためには, 任意の複素数 q に対して (7) の成立を示せばよいのだが, 実際は (7) の両辺は q-変数の多項式と考えられるので, $0 < |q| < 1$ となる複素数に対してのみ (7) の成立が示せれば定理 2.26 の成立が示せたことになる. そのことは次の補題を用いれば容易に分かる.

補題 2.28. $n \in \mathbb{P}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$$

に対して $\exists x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ s.t.

$$f(x_i) = g(x_i) \quad (\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}), \quad \text{“}x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\text{”}$$

のとき

$$a_i = b_i \quad (\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}).$$

i.e.

$$f(x) = g(x) \quad (\forall x \in \mathbb{C}).$$

[14] (P, ω)-partition を経由して, 定理 2.26 の系として得られる.

($\because$) 与えられた条件を行列を用いて書き直すと

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

ここで

$$X := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

とおくとファンデルモンドの行列式と仮定より

$$\det X = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$$

となるので X は正則行列.
従って (9) の両辺に X^{-1} を掛けると

$$a_i = b_i \quad (\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\})$$

が得られる. $\square$

次は 定理 2.26 を poset の言葉で言い換え, 有限和から無限和の形に書き換えるために, 簡単に poset の概念についての解説を行う.

3 poset 超入門

ここでは以後の展開に最低限必要な poset に関する用語についての解説を目的とする.

定義 3.1 (2項関係)**.** X を集合とする. X の任意の2元 a, b に対して成立するか成立しないかがはっきりとしている命題を X 上の2項関係と呼び, $a, b \in X$ に対して2項関係が成立しているとき「a と b には関係がある」といい, 成立していないとき「a と b には関係がない」という.
$\sim$ を X 上の2項関係とする. $a, b \in X$ に対して a と b に関係があるとき

$$a \sim b$$

で表し, 関係がないとき

$$a \not\sim b$$

で表す.

例 3.2. $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して「$a - b$ が 0 以上である」といった命題は $\mathbb{Z}$ 上の2項関係である.
この $\mathbb{Z}$ 上の2項関係を $\sim$ で表すと

$$3 \sim 2, \quad 2 \not\sim 3, \quad 1 \sim 1$$

である.

定義 3.3 (順序関係)**.** P を集合とし, $\leq$ を P 上の2項関係とする.
$\leq$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすとき $\leq$ を（P の）順序関係と呼ぶ.

(i) $a \leq a$ $(\forall a \in X)$.

(ii) $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$.

(iii) $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

P 上の順序関係であることを明示する必要があるときには $\leq$ を $\leq_P$ で書くこともある.

順序関係を備えた集合を順序集合 (partially ordered set=略して poset) と呼ぶ. 順序関係を明確にするために, $(P, \leq)$ といったように集合と順序関係とのペアでもって順序集合を表すこともある.

特に元の数が有限個の順序集合は有限順序集合 (finite poset) と呼ばれる.

例 3.4.

(i) $\mathbb{Z}$ に通常の大小関係で順序関係を考えたとき $\mathbb{Z}$ は順序集合である. i.e. $(\mathbb{Z}, \leq)$ ($\leq$ は通常の大小関係) は順序集合.

(ii) 集合 A に対して

$$2^A := \ A \text{ の部分集合全体の集合}$$

とする. このとき $B \subseteq 2^A$ に対して $(B, \subseteq)$ は順序集合である.

(iii) $a, b \in \mathbb{P}$ に対して 2 項関係 $|$ を次で定義する.

$$a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{P} \text{ s.t. } b = ka$$

このとき, この 2 項関係は順序関係となる.
即ち $(\mathbb{P}, |)$ は順序集合である.

問 13. 例 3.4-(ii),(iii) を poset の定義に従ってチェックせよ

以下, 特に断らない限り P を poset とする.

定義 3.5 (全順序)**.** $\forall x, y \in P$ に対して $x \leq_P y$ *or* $y \leq_P x$ のとき P を全順序集合と呼ぶ. 特にこのとき, 順序関係 $\leq_P$ は全順序と呼ばれる.

有限集合に対しては、適当に番号付けをすることにより全順序を定義することができる.

定義 3.6 (cover)**.** $x, y \in P$ に対して

$$\begin{aligned} &x < y \Leftrightarrow x \leq y, x \neq y, \\ &x \lessdot y \Leftrightarrow x < y, \text{“}x \leq z \leq y \Rightarrow z = x \text{ or } y\text{”} \end{aligned}$$

とする. $x \lessdot y$ のとき y は x を cover する (x は y に cover される) という.

例 3.7. $\mathbb{Z}$ において

$$5 \lessdot 6, \quad -3 \lessdot -2, \quad 7 \lessdot 8 \lessdot 9$$

であるが $1 \lessdot 3$ ではない.
特に $\mathbb{Z}$ においては

$$x \lessdot y \Leftrightarrow y - x = 1$$

である.

問 14. $(P, \leq) := (2^{\mathbb{P}}, \subseteq)$ とする.
このとき $A, B \in P$ に対して $A \lessdot B$ であるための必要十分条件は何か？

次に poset を視覚的にとらえるときに非常に役立つ Hasse diagram について述べる.

定義 3.8 (無向グラフ)**.** V を有限集合とし[15], $E \subseteq \{\{x, y\}; x, y \in V\})$ とする. このとき $G = (V, E)$ は（V を頂点集合 (vertex set) とし, E を枝集合 (edge set) とする）無向グラフと呼ばれる[16].

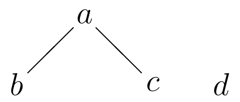
無向グラフ $G = (V, E)$ に対して,「V の一つの元に一つの点が対応し, $\{x, y\} \in E$ のときに x に対応する点と y に対応する点との間が線で結ばれているといった図形」を対応させることができる. また, 逆にこのような図形に対しては無向グラフが一意的に定まる. 従って, 以後無向グラフとこのような図形を同一視する.

例 3.9.

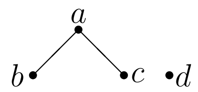
[15] 実際は無限集合に対しても考えられるが, 本稿では話を簡単にするために有限集合として考えることとする.

[16] $\{\{x, y\}; x, y \in V\}$ の代わりに $V \times V$ の部分集合として E を考えたとき (V, E) は有向グラフと呼ばれる. 詳細は 5 章参照.

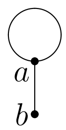
(i) グラフ $G=(\{a,b,c,d\},\{\{a,b\},\{a,c\}\})$ は次の図形と対応している.



次のように書かれることもある



(ii) $G=(\{a,b\},\{\{a,b\},\{a\}\})$ に対応する図形は次のものである.



定義 3.10 (ハッセ図)**.** P: finite poset に対して

$$C(P):=\{\{x,y\}\subseteq P; x\lessdot y\}$$

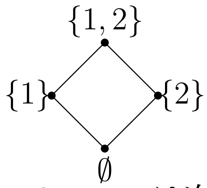
とおく.
このとき無向グラフ $(P,C(P))$ に対応する図形で次を満たす図形を P のハッセ図 (Hasse diagram) と呼ぶ.

$x\lessdot y \Leftrightarrow x$ に対応する点よりも y に対応する点の方が上にかかれている.

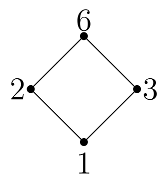
例 3.11.

(i) $(\{1,2,3\},\leq)$ の Hasse diagram は次のもの.

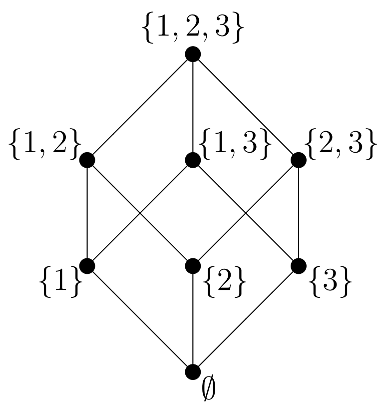
(ii) $(2^{\{1,2\}},\subseteq)$, $(\{1,2,3,6\},|)$ の Hasse diagram はそれぞれ次のもの



,



(iii) $(2^{\{1,2,3\}},\subseteq)$ の Hasse diagram は次のもの.



問 15. $(2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$, $(\{1,2,3,4,5,6\}, |)$ に対する Hasse diagram を書け.

定義 3.12 (同型)**.** 2つの poset P, Q に対して次を満たす P から Q への全単射が存在するとき P と Q は（順序集合として）同型であるといい, $P \simeq Q$ で表す.

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y).$$

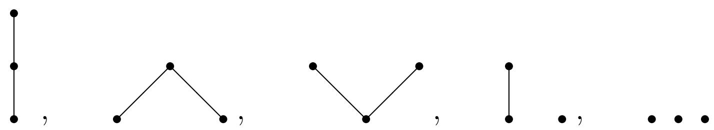
例 3.13. $(2^{\{1,2\}}, \subseteq)$ と $(\{1,2,3,6\}, |)$ は順序集合として同型である.

注意 3.14. poset が同型であることと, 同じ形の Hasse diagram がかけることとは同値である. 従って, 線で結ばれている2つの元のどちらかが常に上にかかれている無向グラフも元の名前の記入が省略されているものと考え以後 poset とみなす. poset の構造の情報としてはどことどこがつながっているかが最も重要である.

例 3.15.

(i) 元の個数が2個の poset は同型を除いて2個ある.

(ii) 元の個数が3個の poset は同型を除いて次の5つある.



問 16. 元の個数が4個の poset は同型を除いていくつあるか?全ての Hasse diagram を先の例に従って記述せよ.

4 (P,ω)-partition

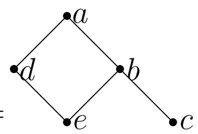
ここでは Stanley の (P,ω)-partition の理論についての紹介を目的とする.

定義 4.1 (labeling)**.** P: poset, $|P| = n$ に対して

$$\omega : P \to \{1, 2, \ldots, n\}, \text{全単射}$$

をここでは P の labeling と呼ぶ.

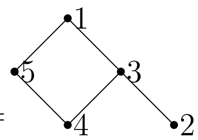
例 4.2. P を次の Hasse diagram で定義される poset とする.

$P =$ 

$\omega : P \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ を

$$\omega(a) := 1,\ \omega(b) := 3,\ \omega(c) := 2,\ \omega(d) := 5,\ \omega(e) := 4$$

で定義すると, ω は P の labeling.
以下, labeling ω を

$\omega =$ 

といったように表すこととする.

以下 P を $|P| = n$ となる poset, ω を P の labeling の一つとし, 固定する.

定義 4.3 ((P,ω)-partition)**.** $\varphi : P \to \mathbb{N}$ が次の (i), (ii) を満たすとき φ を (P,ω)-partition と呼び, その全体の集合を $\mathcal{A}(P,\omega)$ で表す.

(i) $a \leq b$ in $P \Rightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$,

(ii) $a < b$ in P, $\omega(a) > \omega(b) \Rightarrow \varphi(a) > \varphi(b)$.

さらに, $\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega)$ に対して

$$|\varphi| := \sum_{a \in P} \varphi(a)$$

とおき,

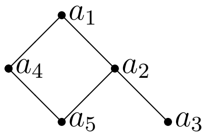
$$F(P,\omega;q) := \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega)} q^{|\varphi|}$$

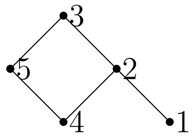
とおく. ただし, $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$ とする.

注意 4.4. (P, ω)-partition の定義における (ii) の条件は次の (ii)' におきかえてもよい.

(ii)' $a \lessdot b$ in P, $\omega(a) > \omega(b) \Rightarrow \varphi(a) > \varphi(b)$.

例 4.5. $P = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ と ω が次のとき

$P =$ 

, $\omega =$ 

$\varphi : P \to \mathbb{N}$ に対して

$$\varphi : (P, \omega)\text{−partition} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} \varphi(a_1) & \leq & \varphi(a_2) & \leq & \varphi(a_3) \\ \wedge & & \wedge & & \\ \varphi(a_4) & \leq & \varphi(a_5) & & \end{array}.$$

従って,

$$\begin{aligned} F(P, \omega; q) &= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega)} q^{|\varphi|} \\ &= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega)} q^{\varphi(a_1)+\varphi(a_2)+\cdots+\varphi(a_5)} \\ &= \sum_{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 \in \mathbb{N},\ \begin{array}{ccccc} b_1 & \leq & b_2 & \leq & b_3 \\ \wedge & & \wedge & & \\ b_4 & \leq & b_5 & & \end{array}} q^{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}. \\ &= \sum_{\substack{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 \in \mathbb{N}, \\ b_1 \leq b_2 \leq b_3, b_1 < b_4, b_4 \leq b_5, b_2 < b_5}} q^{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}. \end{aligned}$$

次に $F(P, \omega; q)$ と先に出てきた major index との関連について述べる. その前に記号を一つ準備する.

定義 4.6 (linear extension)**.** P: finite poset, $|P| = n$ とする. 全単射 $\tau : P \to \{1, 2, \ldots n\}$ が

$$x \leq y \Rightarrow \tau(x) \leq \tau(y)$$

を満たすとき, τ を P の linear extension（線形拡張）と呼び,

$$\mathcal{L}(P) := \ P \text{ の linear extenstion 全体の集合}$$

とおく.

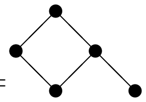
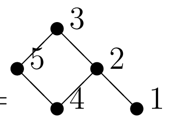
次が成立している.

定理 4.7 (Stanley [2]). P: poset, $|P| = n$, ω: P の labeling に対して

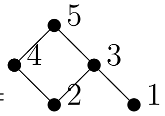
$$F(P, \omega; q) = \frac{\sum_{\tau \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})}}{(q;q)_n}.$$

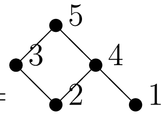
ここで, $(q;q)_n := (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)$ for $n \in \mathbb{P}$ とする.

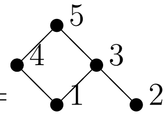
例 4.8. P と ω は 例 4.5 と同じものとする.
i.e.

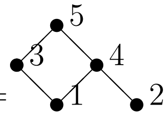
$P =$  , $\omega =$ 

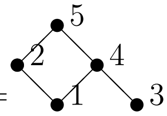
このとき, $\mathcal{L}(P)$ の元は次の 5 つ.

$\tau_1 =$ 

, $\tau_2 =$ 

, $\tau_3 =$ 

, $\tau_4 =$ 

, $\tau_5 =$ 

.

従って

$$\begin{aligned} \{\omega \circ \tau^{-1}; \tau \in \mathcal{L}(P)\} &= \{\omega \circ \tau_i^{-1}; i \in [5]\} \\ &= \{14253, 14523, 41253, 41523, 45123\} \end{aligned}$$

であり

$$\mathrm{maj}(14253) = 6, \mathrm{maj}(14523) = 3, \mathrm{maj}(41253) = 5, \mathrm{maj}(41523) = 4, \mathrm{maj}(45123) = 2.$$

従って,

$$\frac{\sum_{\tau \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})}}{(q;q)_5} = \frac{q^2(1+q+q^2+q^3+q^4)}{(q:q)_5}.$$

よって, 定理 4.7 より

$$F(P, \omega; q) = \frac{q^2[5]}{(q;q)_5} \tag{10}$$

となる.

以下, 実際に $F(P, \omega; q)$ をさらに細かく計算することにより (10) の成立を確かめてみよう. まず,

$$\begin{aligned} &\{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{N}^5; b_1 \le b_2 \le b_3, b_1 < b_4, b_4 \le b_5, b_2 < b_5\} \\ &= \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{N}^5; b_1 < b_4 \le b_2 \le b_3, b_4 \le b_5, b_2 < b_5\} \\ &\quad \sqcup \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{N}^5; b_1 \le b_2 < b_4 \le b_3, b_4 \le b_5, b_2 < b_5\} \\ &\quad \sqcup \{(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{N}^5; b_1 \le b_2 \le b_3 < b_4, b_4 \le b_5, b_2 < b_5\} \end{aligned}$$

($\sqcup$ は disjoint union とする)

$$\begin{aligned}&= \{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in\mathbb{N}^5; b_1 < b_4 \le b_2 < b_5 \le b_3\}\\ &\quad \sqcup \{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in\mathbb{N}^5; b_1 < b_4 \le b_2 \le b_3 < b_5\}\\ &\quad \sqcup \{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in\mathbb{N}^5; b_1 \le b_2 < b_4 \le b_5 < b_3\}\\ &\quad \sqcup \{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in\mathbb{N}^5; b_1 \le b_2 < b_4 \le b_3 \le b_5\}\\ &\quad \sqcup \{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)\in\mathbb{N}^5; b_1 \le b_2 \le b_3 < b_4 \le b_5\}\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}F(P,\omega;q) = &\sum_{0\le a_1<a_2\le a_3<a_4\le a_5} q^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} + \sum_{0\le a_1<a_2\le a_3\le a_4<a_5} q^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}\\ &+ \sum_{0\le a_1\le a_2<a_3\le a_4<a_5} q^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} + \sum_{0\le a_1\le a_2<a_3\le a_4\le a_5} q^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}\\ &+ \sum_{0\le a_1\le a_2\le a_3<a_4\le a_5} q^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}.\end{aligned}$$

ここで, 例えば

$$\begin{aligned}&g : \{(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)\in\mathbb{N}^5; c_1\le c_2\le c_3\le c_4\le c_5\}\\ &\ \to \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\in\mathbb{N}^5; a_1 < a_2 \le a_3 < a_4 \le a_5\}\end{aligned}$$

を

$$g(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5) := (c_1, c_2+1, c_3+1, c_4+2, c_5+2)$$

で定義すると, g は全単射となり

$$\begin{aligned}\sum_{0\le a_1<a_2\le a_3<a_4\le a_5} q^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} &= \sum_{0\le c_1\le c_2\le c_3\le c_4\le c_5} q^{c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+6}\\ &= q^6 \sum_{0\le c_1\le c_2\le c_3\le c_4\le c_5} q^{c_1+c_2+c_3+c_4+c_5}\\ &= \frac{q^6}{(q;q)_5}.\end{aligned}$$

従って, 同様の考え方で個々に計算すると

$$F(P,\omega;q) = \frac{q^6+q^5+q^4+q^3+q^2}{(q;q)_5} = \frac{q^2[5]}{(q;q)_5}$$

となり定理の成立が確認できた.

尚, 定理 4.7 の証明はかなり細かい議論となるので本節では略とし, 詳細は 7.2 節に掲載することとする.

次に 定理 2.26 を poset と (P,ω)-partition の言葉を用いて言い換えてみよう.

記号 4.9. λ: partition に対して poset $P(\lambda)$ とその labeling ω_λ を次で定義する.

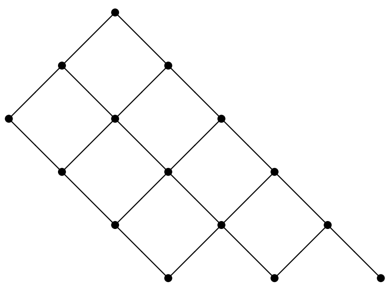
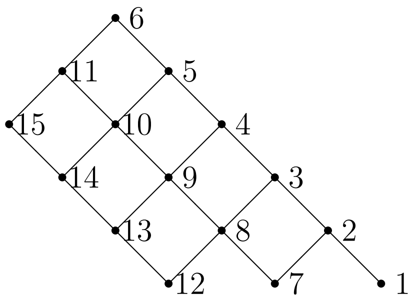
$$P(\lambda) = \lambda(= \{(i,j) \in \mathbb{P} \times \mathbb{P}; 1 < j \leq \lambda_i\}) \text{ as a set},$$
$$(i,j) \leq (i',j') \text{ in } P(\lambda) \Leftrightarrow i \geq i', j \geq j'.$$

$(i,j) \in \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ に対して

$$\omega_\lambda((i,j)) := \sum_{k=1}^{i} \lambda_k - j + 1.$$

とおく.

例 4.10. $\lambda = (6,5,4)$ のとき

$P(\lambda) =$  , $\omega_\lambda =$ 

となる.

ここで

$$\sum_{T \in \mathrm{STab}(\lambda)} q^{\mathrm{maj}(f_{T_0} \circ f_{T^*}^{-1})} = \sum_{\tau \in \mathcal{L}(P(\lambda))} q^{\mathrm{maj}(\omega_\lambda \circ \tau^{-1})}$$

であることが, それぞれの定義より容易に分かるので, 現時点での目的となる定理 2.26 での等式

$$\sum_{T \in \mathrm{STab}(\lambda)} q^{\mathrm{maj}(f_{T_0} \circ f_{T^*}^{-1})} = q^{b(\lambda)} \frac{[|\lambda|]!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} [h_\lambda(i,j)]}$$

を示すためには 定理 4.7 を用いると次を示せばよいということになる.

定理 4.11.

$$F(P(\lambda), \omega_\lambda; q) = \frac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{x \in P(\lambda)} (1 - q^{h(x)})} \tag{11}$$

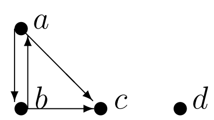
(11) を示すためには lattice path method と呼ばれる技が有効である.

5 lattice path method

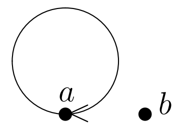
ここでは lattice path method と呼ばれる技の紹介とその証明を行い, lattice path method を用いて $F(P(\lambda),\omega_\lambda;q)$ を行列式の形で表示することを目的とする.

定義 5.1 (有向グラフ)**.** V: 有限集合, $E \subseteq \{(u,v); u,v \in V\}$ とし, pair (V,E) を digraph（有向グラフ）と呼ぶ.
digraph (V,E) は V の元を vertex とし, 各 $(u,v) \in E$ を u から v への矢印 $\to$ として表されることが多い.

例 5.2. (i) $V=\{a,b,c,d\}$, $E=\{(a,b),(b,a),(b,c),(a,c)\}$ のとき, digraph (V,E) は次のように表される (vertex のおく場所はどこでもよい).



(ii) $V=\{a,b\}$, $E=\{(a,a)\}$ のときは



以下 (V,E) を digraph とする.

定義 5.3 (cyclic, acyclic digraph)**.**

$$\begin{aligned}&(V,E):\ \text{cyclic digraph}\\ &\Leftrightarrow \exists v_0,v_1,v_2,\ldots,v_r \in V \text{ s.t. } (v_{i-1},v_i)\in E \text{ for } i\in\{1,2,\ldots,r\}, v_0=v_r.\end{aligned}$$

cyclic でない digraph[17] を acyclic digraph と呼ぶ.
例えば先の例はどちらも cyclic digraph である.

定義 5.4 (path)**.** $r\in\mathbb{N}$, $A=(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_r)\subseteq V^{r+1}$ とする.
$r=0$ のときは, 常に $A=(a_0)$ を a_0 から a_0 への長さ 0 の path と呼び, $r\geq 1$ のときには,

$$(a_{i-1},a_i)\in E \text{ for } i\in\{1,2,\ldots,r\}$$

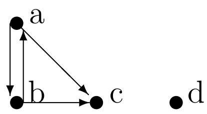
が成立しているときにのみ $A=(a_0,a_1,\ldots,a_r)$ を a_0 から a_r への長さ r の path と呼ぶ.
$r\in\mathbb{N}$, $u,v\in V$ に対して

$$P_r(u,v) := u \text{ から } v \text{ への長さ } r \text{ の path 全体の集合}, \quad P(u,v) := \cup_{r=0}^{\infty} P_r(u,v)$$

とおく.

[17] i.e. 全ての vertex においてどのような方向をたどっていっても元にはもどらない.

例 5.5.



のとき

$$(a,c),(a,b,c),(a,b,a,b,c) \in P(a,c), \quad P(c,a)=\emptyset, \quad P(d,d)=\{(d)\}.$$

定義 5.6 (D-compatible)**.** 2つの path $P_1=(a_0,a_1,\ldots,a_r)$, $P_2=(b_0,b_1,\ldots,b_s)$ に対して

$$P_1 \cap P_2 := \{a_0,a_1,\ldots,a_r\} \cap \{b_0,b_1,\ldots,b_s\}$$

とおき,

$$P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$$

のとき P_1 と P_2 は交わるといい, そうでないとき P_1 と P_2 は交わらないという.
$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n) \in V^n$ に対して

$$\begin{aligned} P(\mathbf{u},\mathbf{v}) &:= \{(P_1,P_2,\ldots,P_n); P_i \in P(u_i,v_i) \text{ for } i \in \{1,2,\ldots,n\}\} \\ P^0(\mathbf{u},\mathbf{v}) &:= \{(P_1,P_2,\ldots,P_n) \in P(\mathbf{u},\mathbf{v});\ P_i \cap P_j = \emptyset \text{ for } i,j \in \{1,2,\ldots,n\} \text{ with } i \neq j\} \end{aligned}$$

とおき

$\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は D-compatible $\Leftrightarrow$
"$1 \leq a_1 < a_2 \leq n, 1 \leq b_1 < b_2 \leq n, P \in P(u_{a_1}, v_{b_2}), P' \in P(u_{a_2}, v_{b_1}) \Rightarrow P \cap P' \neq \emptyset$"

とする.

記号 5.7. 各 $(u,v) \in E$ には, 変数 $x_{(u,v)} \in \mathbb{C}$ が定義されているとする.
path $P=(a_0,a_1,\ldots,a_r)$ に対して

$$\mathrm{wt}(P) := \begin{cases} 1 & \text{if } r=0 \\ \prod_{i=1}^{r} x_{(a_{i-1},a_i)} & \text{if } r \geq 1, \end{cases}$$

とおき, $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V^n$, $\mathbf{P}=(P_1,P_2,\ldots,P_n) \in P(\mathbf{u},\mathbf{v})$ に対して

$$\mathrm{wt}(\mathbf{P}) := \prod_{i=1}^{n} \mathrm{wt}(P_i)$$

とおく. さらに, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_n) \in V^n$, $\sigma \in S_n$ に対して

$$\mathbf{v}^{\sigma} := (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$$

とおき, $u,v \in V$, $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V^n$ に対して,

$$\begin{aligned} F(u,v) &:= \sum_{P \in P(u,v)} \mathrm{wt}(P), \\ F^0(\mathbf{u},\mathbf{v}) &:= \sum_{\mathbf{P} \in P^0(\mathbf{u},\mathbf{v})} \mathrm{wt}(\mathbf{P}) \end{aligned}$$

とおく[18].

[18] $P(u,v)=\emptyset$ のときには $F(u,v)=0$ として考える.

このとき次が成立する.

定理 5.8 (Gessel-Viennot [1])**.** (V, E): acyclic digraph, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V^n$ に対して

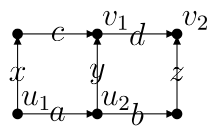
$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}^\sigma) = \det(F(u_i, v_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

特に, $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が D-compatible のときには

$$F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(F(u_i, v_j))_{1 \le i,j \le n}.$$

証明の前に少し手を動かして, 定理 5.8 が成立していることを簡単な例で確かめてみよう.

例 5.9. (V, E) と weight $a \in E$ に対する変数 $x_a \in \mathbb{C}$ を



とする. $\mathbf{u} := (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} := (v_1, v_2)$ とおくと $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は D-compatible で,

$$\begin{aligned}
F(u_1, v_1) &= ay + cx, \\
F(u_1, v_2) &= abz + ady + cdx, \\
F(u_2, v_1) &= y, \\
F(u_2, v_2) &= bz + dy, \\
F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= bcxz.
\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
\det(F(u_i, v_j))_{1 \le i,j \le 2} &= \det \begin{pmatrix} ay + cx & abz + ady + cdx \\ y & bz + dy \end{pmatrix} \\
&= (ay + cx)(bz + dy) - (abz + ady + cdx)y \\
&= bcxz \\
&= F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

となるので, このときの定理の成立が確かめられた.

定理 5.8 の証明 以下,

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) :&= \{(\sigma, \mathbf{P}); \sigma \in S_n, \mathbf{P} \in P(\mathbf{u}, \mathbf{v}^\sigma)\}, \\
&\quad (= \{(\sigma, \mathbf{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)); \sigma \in S_n, P_i \in P(u_i, v_{\sigma(i)})\}) \\
\Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) :&= \{(\sigma, \mathbf{P}); \sigma \in S_n, \mathbf{P} \in P^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}^\sigma)\} \\
&\quad (= \{(\sigma, \mathbf{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)) \in \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \\
&\qquad P_i \cap P_j = \emptyset \text{ for } i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ with } i \neq j\})
\end{aligned}$$

とおき, $C=(\sigma,\mathbf{P})\in\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ に対して

$$\mathrm{wt}(C):=\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{wt}(\mathbf{P})$$

とする. まず, 直接の計算により

$$\begin{aligned}
&\det(F(u_i,v_j))_{1\le i,j\le n}\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)F(u_1,v_{\sigma(1)})F(u_2,v_{\sigma(2)})\dots F(u_n,v_{\sigma(n)})\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\Pi_{i=1}^n F(u_i,v_{\sigma(i)})\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\Pi_{i=1}^n\sum_{P_i\in P(u_i,v_{\sigma(i)})}\mathrm{wt}(P_i)\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{P_1\in P(u_1,v_{\sigma(1)})}\mathrm{wt}(P_1)\sum_{P_2\in P(u_2,v_{\sigma(2)})}\mathrm{wt}(P_2)\cdots\sum_{P_n\in P(u_n,v_{\sigma(n)})}\mathrm{wt}(P_n)\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{(P_1,P_2,\dots,P_n)\in P(\mathbf{u},\mathbf{v}^\sigma)}\Pi_{i=1}^n\mathrm{wt}(P_i)\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{\mathbf{P}\in P(\mathbf{u},\mathbf{v}^\sigma)}\mathrm{wt}(\mathbf{P})\\
&=\sum_{(\sigma,\mathbf{P})\in\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{wt}(\mathbf{P})\\
&=\sum_{C\in\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})}\mathrm{wt}(C).
\end{aligned}$$

ここで V に全順序を一つ定義し, 以下 V を全順序集合として考える. $\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})-\Phi^0(\mathbf{u},\mathbf{v})\neq\emptyset$ のときに

$$\varphi:\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})-\Phi^0(\mathbf{u},\mathbf{v})\to\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})-\Phi^0(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

を次で定義する.
まず, $C=(\sigma,\mathbf{P}=(P_1,P_2,\dots,P_n))\in\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})-\Phi^0(\mathbf{u},\mathbf{v})$ に対して

$$v_0:=\min\{v\in V;\exists i,j\in\{1,2,\dots,n\}\text{ s.t. }v\in P_i\cap P_j,i\neq j\}$$

とおき,

$$\begin{aligned}
i:&=\min\{k\in\{1,2,\dots,n\};v_0\in P_k\},\\
j:&=\min\{k\in\{1,2,\dots,n\}-\{i\};v_0\in P_k\}
\end{aligned}$$

とする. ただし, $P=(d_0,d_1,\dots,d_n)$, $u\in V$ に対して

$$u\in P\Leftrightarrow u\in\{d_0,d_1,\dots,d_n\}$$

とする. 次に

$$\begin{aligned}
P_i&=(u_i=a_0,a_1,a_2,\dots,a_r=v_{\sigma(i)}),\\
P_j&=(u_j=b_0,b_1,b_2,\dots,b_s=v_{\sigma(j)})
\end{aligned}$$

とし, $v_0 = a_k = b_h$ ($k \in \{0, 1, \ldots, r\}$, $h \in \{0, 1, \ldots, s\}$) のとき

$$
\begin{aligned}
P_i' &:= \begin{cases} (u_i = a_0, a_1, \ldots, a_k, b_{h+1}, \ldots b_s = v_{\sigma(j)}) & \text{if } 0 \leq h < s, \\ (u_i = a_0, a_1, \ldots, a_k = v_{\sigma(j)}) & \text{if } h = s, \end{cases} \\
P_j' &:= \begin{cases} (u_j = b_0, b_1, \ldots, b_h, a_{k+1}, \ldots a_r = v_{\sigma(i)}) & \text{if } 0 \leq k < r, \\ (u_j = b_0, b_1, \ldots, b_h = v_{\sigma(i)}) & \text{if } k = r \end{cases} \\
P_m' &:= P_m \text{ if } m \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{i, j\}, \\
\mathbf{P}' &:= (P_1', P_2', \ldots, P_n'), \\
\sigma' &:= \sigma \circ (i, j)
\end{aligned}
$$

とおくこのとき

$$(\sigma', \mathbf{P}') \in \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathrm{sgn}(\sigma') = -\mathrm{sgn}(\sigma), \quad \mathrm{wt}(\mathbf{P}) = \mathrm{wt}(\mathbf{P}')$$

となっているので

$$\varphi((\sigma, \mathbf{P})) := (\sigma', \mathbf{P}')$$

と定義でき,

$$\varphi^2 = \mathrm{id}, \quad \mathrm{wt}(\varphi(C)) = -\mathrm{wt}(C) \text{ for } C \in \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

となることも容易にわかる.
従って

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{\varphi(C); C \in \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}$$

に注意すると

$$\sum_{C \in \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \mathrm{wt}(C) = \sum_{C \in \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \mathrm{wt}(\varphi(C)) = -\sum_{C \in \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \mathrm{wt}(C).$$

即ち

$$\sum_{C \in \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \mathrm{wt}(C) = 0.$$

よって

$$
\begin{aligned}
\det(F(u_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n} &= \sum_{C \in \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \mathrm{wt}(C) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n, \mathbf{P} \in P^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}^\sigma)} \mathrm{sgn}(\sigma) \mathrm{wt}(\mathbf{P}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}^\sigma). \qquad (12)
\end{aligned}
$$

以下, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ は D-compatible とする. まず, $(\sigma, \mathbf{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)) \in \Phi^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ならば $\sigma = e$ (単位元) であることが容易に分かる. 実際 $\sigma \neq e$ とすると

$$\exists k, h \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ s.t. } k < h, \sigma(k) > \sigma(h)$$

となり $P_k \in P(u_k, v_{\sigma(k)})$ と $P_h \in P(u_h, v_{\sigma(h)})$ は $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ が D-compatible より交わり矛盾.
従って, (12) より

$$\det(F(u_i, v_j))_{1\le i,j\le n} = \mathrm{sgn}(e)F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}^e) = F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

となり成立する. □

以下, $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$ とし, lattice path method を用いて次を示すことを目的とする.

命題 5.10. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$: partition に対して

$$F(P(\lambda), \omega_\lambda; q) = \det\left(\frac{1}{(q;q)_{\lambda_i+j-i}}\right)_{1\le i,j\le r}.$$

ただし, $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(q;q)_a := \begin{cases} (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^a) & \text{if } a > 0, \\ 1 & \text{if } a = 0, \\ \infty & \text{if } a < 0. \end{cases}$$

とする[19].

命題 5.10 の証明の前に補題を 2 つ示そう.

補題 5.11. $a, m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{bmatrix} a+m \\ a \end{bmatrix} := \begin{cases} \frac{[a+m]!}{[a]![m]!} & \text{if } a, m \ge 0, \\ 0 & \text{if } a < 0 \text{ or } m < 0. \end{cases}$$

とおくと[20].

$$\lim_{m\to\infty} \begin{bmatrix} a+m \\ a \end{bmatrix} = \frac{1}{(q;q)_a}.$$

($\because$) $a < 0$ のときには両辺共に 0 となり, $a = 0$ のときには両辺共に 1 となり成立しているので, $a > 0$ に対して示す.

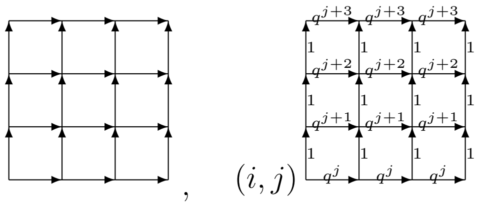
$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \begin{bmatrix} a+m \\ a \end{bmatrix} &= \lim_{m\to\infty} \frac{[a+m][a+m-1]\cdots[m+1]}{[a][a-1]\cdots[1]} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{(1-q^{a+m})(1-q^{a+m-1})\cdots(1-q^{m+1})}{(1-q^a)(1-q^{a-1})\cdots(1-q)} \\ &= \frac{1}{(1-q^a)(1-q^{a-1})\cdots(1-q)} \\ &= \frac{1}{(q;q)_a}. \quad \square \end{aligned}$$

[19] これまでの定義よりも少し拡張された定義となっている. 特に $a < 0$ のときに $(q;q)_a = \infty$ としているが, これはいたずらに場合分けが増えるのを避けるため, ∞ といったシンボルでもって, $\frac{1}{\infty} = 0$ として考えてもらいたいといった望みからきている.
[20] ここでもこれまでよりも範囲を拡張して定義している.

補題 5.12. $V=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $E=\{((i,j),(i+1,j)),((i,j),(i,j+1));i,j\in\mathbb{Z}\}$ とし, $((i,j),(i+1,j)),((i,j),(i,j+1))\in E$ に対する weight を

$$x_{((i,j),(i+1,j))}=q^j,\quad x_{((i,j),(i,j+1))}=1$$

として定義する.



このとき $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Z}$, $a_2<b_2$ に対して次が成立する[21].

$$F((a_1,a_2),(b_1,b_2))=q^{a_2(b_1-a_1)}\begin{bmatrix}b_1-a_1+b_2-a_2\\ b_1-a_1\end{bmatrix}.$$

$(\because)$ $F((a_1,a_2),(b_1,b_2))=\sum_{P\in P((a_1,a_2),(b_1,b_2))}\mathrm{wt}(P)$ であるので E と [ ] の定義より $a_1>b_1$ のときには両辺$=0$ となり, $a_1=b_1$ のときには両辺$=1$ となり成立. $a_1<b_1$ のときの成立を示そう. weight の定義より

$$F((a_1,a_2),(b_1,b_2))=\sum_{a_2\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_{b_1-a_1}\le b_2}q^{i_1+i_2+\cdots+i_{b_1-a_1}}$$

$i_k=a_2+j_k$ $(k=1,2,\ldots,b_1-a_1)$ と置き換えて整理すると

$$\begin{aligned}&=q^{a_2(b_1-a_1)}\sum_{0\le j_1\le j_2\le\cdots\le j_{b_1-a_1}\le b_2-a_2}q^{j_1+j_2+\cdots+j_{b_1-a_1}}\\&=F(b_1-a_1,b_2-a_2;q)\quad(\because\ \text{注意 2.6-(iii)})\\&=\begin{bmatrix}b_1-a_1+b_2-a_2\\ b_1-a_1\end{bmatrix}\quad(\because\ \text{命題 2.12})\end{aligned}$$

となり成立. □

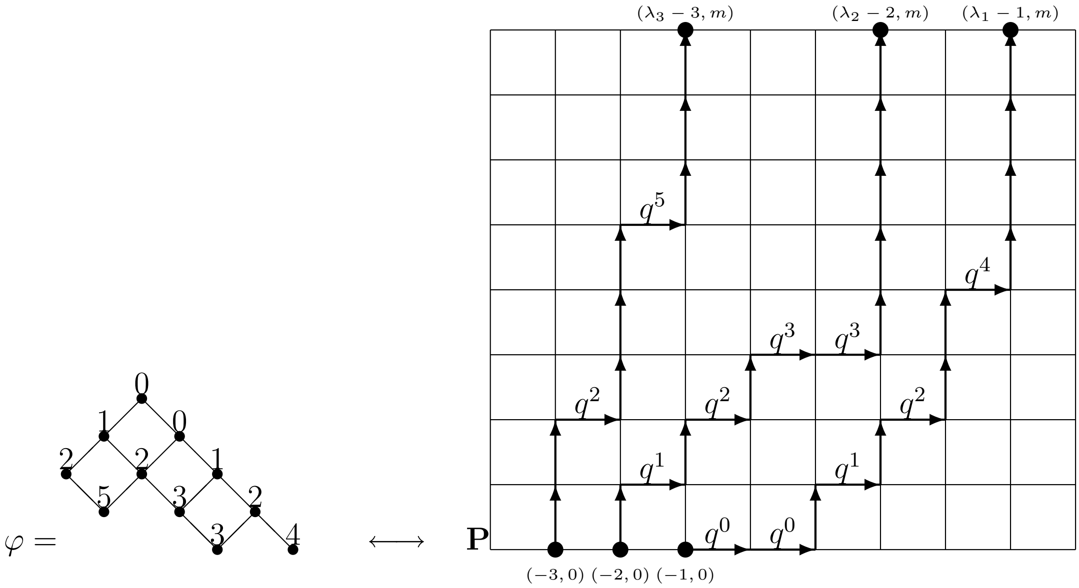
命題 5.10 の証明 (V,E) と weight は 補題 5.12 と同じとし, $m\in\mathbb{N}$, $m\ge r-1$ に対して

$$\begin{aligned}u_i&:=(-i,0)\text{ for }i\in\{1,2,\ldots,r\},\\v_i&:=(\lambda_i-i,m)\text{ for }i\in\{1,2,\ldots,r\},\\\mathbf{u}&:=(u_1,u_2,\ldots,u_r),\\\mathbf{v}&:=(v_1,v_2,\ldots,v_r)\end{aligned}$$

[21] (V,E) を digraph として考えるときには, 本稿では V を有限集合として考えることにしていたので, もし違和感のあるときには, $|a_1|,|a_2|,|b_1|,|b_2|$ よりも大きな整数 m をひとつとってきて, $V=\{-m,-m+1,\ldots,m\}^2$ として考えるとよい.

とおくと $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は D-compatible で, $\{\varphi \in \mathcal{A}(P(\lambda), \omega_\lambda); \varphi(x) \leq m \ (\forall x \in P(\lambda))\}$ と $P^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ の元が 1 対 1 に対応していることが容易に分かる.

例えば $\lambda = (5, 4, 2)$, $m = 8$ のとき次が対応している.



さらに, この対応で $q^{|\varphi|} = \mathrm{wt}(\mathbf{P})$ となっているので

$$F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{P} \in P^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})} \mathrm{wt}(\mathbf{P}) = \sum_{\substack{\varphi \in \mathcal{A}(P(\lambda), \omega_\lambda) \\ \varphi(x) \leq m \ (\forall x \in P(\lambda))}} q^{|\varphi|}$$

他方, lattice path method と 補題 5.12 より

$$\begin{aligned} F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \det(F(u_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq r} \\ &= \det(F(u_j, v_i))_{1 \leq i,j \leq r} \\ &= \det(F((-j, 0), (\lambda_i - i, m)))_{1 \leq i,j \leq r} \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda_i + j - i + m \\ \lambda_i + j - i \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i,j \leq r}. \end{aligned}$$

従って, 補題 5.12 とあわせると

$$\begin{aligned} F(P(\lambda), \omega_\lambda; q) &= \lim_{m \to \infty} F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= \lim_{m \to \infty} \det\left(\begin{bmatrix} \lambda_i + j - i + m \\ \lambda_i + j - i \end{bmatrix} \right)_{1 \leq i,j \leq r} \\ &= \det\left(\frac{1}{(q;q)_{\lambda_i + j - i}} \right)_{1 \leq i,j \leq r} \end{aligned}$$

となり成立する. □

6 q-hook length formula の証明

ここでは, これまでに示したことを用いて 定理 4.11 の (11), i.e.

$$F(P(\lambda), \omega_\lambda; q) == \frac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{x \in \lambda}(1 - q^{h_\lambda(x)})},$$

の証明を目的とする.

まず, 記号の整理と簡単な補題を示すことから始める.

記号 6.1. $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$[n]! := \begin{cases} \infty & \text{if } n < 0, \\ 1 & \text{if } n = 0, \\ [n][n-1]! & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

と帰納的に定義する[22].

注意 6.2. $n \in \mathbb{P}$ とすると

$$[-n] = -q^{-n}[n], \ \frac{1}{[-n]!} = 0$$

である.

まず, 簡単なことではあるが, 次が成立している.

補題 6.3. $a, b \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{P}$ に対して次が成立している.

(i)

$$q^b[a-b] = [a] - [b].$$

(ii) $a \geq 0$, $b \geq 1$ のとき

$$\frac{[a]!}{[a-b]!} = q^{-\binom{b}{2}} \prod_{k=0}^{b-1}([a] - [k]).$$

(iii)

$$\sum_{i=1}^{r}(i-1)(r-i) = \binom{r}{3}.$$

[22] ここでも範囲を広げて定義していることに注意.

$(\because)$ (i)

$$q^b[a-b] = q^b\frac{1-q^{a-b}}{1-q} = \frac{q^b-q^a}{1-q} = \frac{1-q^a-1+q^b}{1-q} = [a]-[b].$$

(ii) Case 1. $a<b$ のとき.
$a \geq 0,\ a-b<0$ であるので定義より

$$\frac{[a]!}{[a-b]!} = 0.$$

他方, $0 \leq a \leq b-1$ より

$$q^{-\binom{b}{2}}\prod_{k=0}^{b-1}([a]-[k]) = 0$$

となるので成立する.

Case 2. $a \geq b$ のとき.
(i) と $1 \leq b \leq a$ より

$$\begin{aligned}
\frac{[a]!}{[a-b]!} &= [a][a-1][a-2]\cdots[a-b+1] \\
&= \prod_{k=0}^{b-1}[a-k] \\
&= \prod_{k=0}^{b-1}q^{-k}([a]-[k]) \\
&= q^{-\sum_{k=0}^{b-1}k}\prod_{k=0}^{b-1}([a]-[k]) \\
&= q^{-\binom{b}{2}}\prod_{k=0}^{b-1}([a]-[k])
\end{aligned}$$

となり成立する.

(iii)

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{i=1}^{r}(-r+(r+1)i-i^2) \\
&= -r^2+\frac{r(r+1)^2}{2}-\frac{r(r+1)(2r+1)}{6} \\
&= \frac{r(r-1)(r-2)}{6} \\
&= \binom{r}{3} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

となり成立する. $\square$

さらにもう１つ 補題 を示す[23].

補題 6.4. $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r)\vdash m$ とする.
このとき次が成立する.

(i)
$$\det\left(\frac{1}{(q;q)_{\lambda_i+j-i}}\right)_{1\le i,j\le r}=\frac{q^{b(\lambda)}\prod_{1\le i<j\le r}[\lambda_i-\lambda_j+j-i]}{(1-q)^m\prod_{i=1}^r[\lambda_i+r-i]!}.$$

(ii)
$$\prod_{x\in\lambda}[h_\lambda(x)]=\frac{\prod_{i=1}^r[\lambda_i+r-i]!}{\prod_{1\le i<j\le r}[\lambda_i-\lambda_j+j-i]}.$$

$(\because)$ (i) 示すべき等式の分母を払った

$$(1-q)^m\prod_{i=1}^r[\lambda_i+r-i]!\det\left(\frac{1}{(q;q)_{\lambda_i+j-i}}\right)_{1\le i,j\le r}=q^{b(\lambda)}\prod_{1\le i<j\le r}[\lambda_i-\lambda_j+j-i]\quad(13)$$

を示そう.

$r=1$ のときには (13) の両辺はどちらも 1 となることが容易に分かるので, 以下 $r\ge 2$ として考えよう. まず

$$\sum_{i=1}^r(\lambda_i+\sigma(i)-i)=\sum_{i=1}^r\lambda_i=|\lambda|=m$$

であることに注意すると

$$\begin{aligned}(1-q)^m\det\left(\frac{1}{(q;q)_{\lambda_i+j-i}}\right)_{1\le i,j\le r}&=\sum_{\sigma\in S_r}\frac{\mathrm{sgn}(\sigma)(1-q)^m}{(q;q)_{\lambda_1+\sigma(1)-1}(q;q)_{\lambda_2+\sigma(2)-2}\dots(q;q)_{\lambda_r+\sigma(r)-r}}\\&=\sum_{\sigma\in S_r}\frac{\mathrm{sgn}(\sigma)}{[\lambda_1+\sigma(1)-1]![\lambda_2+\sigma(2)-2]!\dots[\lambda_r+\sigma(r)-r]!}\\&=\det\left(\frac{1}{[\lambda_i+j-i]!}\right)_{1\le i,j\le r}.\end{aligned}$$

従って

$$(13)\text{ の左辺}=\prod_{i=1}^r[\lambda_i+r-i]!\det\left(\frac{1}{[\lambda_i+j-i]!}\right)_{1\le i,j\le r}=\det\left(\frac{[\lambda_i+r-i]!}{[\lambda_i+j-i]!}\right)_{1\le i,j\le r}$$

であるので, $a_i:=\lambda_i+r-i$ $(i\in\{1,2,\dots,r\})$ とおくと

$$(13)\text{ の左辺}=\det\left(\frac{[a_i]!}{[a_i-r+j]!}\right)_{1\le i,j\le r}.$$

[23]定理の証明の本質的なところをぶつ切りにしたものがこの補題である.

よって 補題 6.3-(ii) より, $1 \leq j < r$ に対して

$$\frac{[a_i]!}{[a_i - r + j]!} = \frac{[a_i]!}{[a_i - (r-j)]!} = q^{-\binom{r-j}{2}} \prod_{k=0}^{r-j-1} ([a_i] - [k]).$$

故に

$$\begin{aligned}
&\det\left(\frac{[a_i]!}{[a_i - r + j]!}\right) \\
&= q^{-\sum_{j=1}^{r-1}\binom{r-j}{2}} \det\begin{pmatrix} [a_i]([a_i]-[1])([a_i]-[2])\dots([a_i]-[r-j-1]) & \text{if } 1 \leq j < r \\ 1 & \text{if } j = r \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$[a_i]([a_i]-[1]) = [a_i]^2 - [1][a_i]$ より, 上の行列の $r-1$ 列を $[1]$ 倍して $r-2$ 列に足すと, $r-2$ 列は $[a_i]^2$ となる. これを繰り返し, ファンデルモンドの行列式を思い出すと

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{[a_i]!}{[a_i - r + j]!}\right)_{1 \leq i,j \leq r} &= q^{-\sum_{j=1}^{r-1}\binom{r-j}{2}} \det([a_i]^{r-j})_{1 \leq i,j \leq r} \\
&= q^{-\sum_{j=1}^{r-1}\binom{j}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} ([a_i] - [a_j]) \\
&= q^{-\binom{r}{3}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} q^{a_j}[a_i - a_j] \\
&= q^{-\binom{r}{3} + \sum_{j=2}^{r}(j-1)a_j} \prod_{1 \leq i < j \leq r} [a_i - a_j] \\
&= q^{-\binom{r}{3} + \sum_{j=1}^{r}(j-1)a_j} \prod_{1 \leq i < j \leq r} [a_i - a_j].
\end{aligned}$$

よって a_i を元に戻して, 補題 6.3-(iii) を用いると結論として

$$\begin{aligned}
(13) \text{ の左辺} &= q^{-\binom{r}{3} + \sum_{j=1}^{r}(j-1)(\lambda_j + r - j)} \prod_{1 \leq i < j \leq r} [\lambda_i - \lambda_j + j - i] \\
&= q^{b(\lambda)} \prod_{1 \leq i < j \leq r} [\lambda_i - \lambda_j + j - i] \\
&= (13) \text{ の右辺}.
\end{aligned}$$

(ii) $r = 1$ のときは両辺ともに $[\lambda_1]!$ となり成立しているので $r \geq 2$ のときの成立を示す.
以下, partition の表記として, s^m は $s, s, \dots, s$ と s が m 個並んでいることを意味するものとする. 例えば

$$(4^3, 3^0, 2^1, 1^5) = (4, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$$

である.
まず, λ' の定義より λ' は次のように書けることが容易に分かる.

$$\lambda' = (r^{\lambda_r}, (r-1)^{\lambda_{r-1} - \lambda_r}, \dots, 2^{\lambda_2 - \lambda_3}, 1^{\lambda_1 - \lambda_2}).$$

従って $\lambda_{r+1} := 0$ とおくと

$$\lambda'_j = k \text{ if } \lambda_{k+1} < j \le \lambda_k.$$

よって $(i,j) \in \lambda \Leftrightarrow 1 \le j \le \lambda_i$ より

$$\begin{aligned}
\prod_{x\in\lambda}[h_\lambda(x)] &= \prod_{(i,j)\in\lambda}[h_\lambda(i,j)] \\
&= \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{\lambda_i}[\lambda_i+\lambda'_j-i-j+1] \\
&= \prod_{i=1}^{r}\prod_{\substack{k\in\{i,i+1,\dots,r\}\\ \lambda_k>\lambda_{k+1}}}\prod_{j=\lambda_{k+1}+1}^{\lambda_k}[\lambda_i+\lambda'_j-i-j+1] \\
&= \prod_{i=1}^{r}\prod_{\substack{k\in\{i,i+1,\dots,r\}\\ \lambda_k>\lambda_{k+1}}}\prod_{j=\lambda_{k+1}+1}^{\lambda_k}[\lambda_i+k-i-j+1] \\
&= \prod_{i=1}^{r}\prod_{\substack{k\in\{i,i+1,\dots,r\}\\ \lambda_k>\lambda_{k+1}}}\frac{\prod_{j=\lambda_{k+1}}^{\lambda_k}[\lambda_i+k-i-j+1]}{[\lambda_i+k-i-\lambda_{k+1}+1]} \\
&= \prod_{i=1}^{r}\prod_{k=i}^{r}\frac{\prod_{j=\lambda_{k+1}}^{\lambda_k}[\lambda_i+k-i-j+1]}{[\lambda_i+k-i-\lambda_{k+1}+1]} \\
&= \prod_{i=1}^{r}\frac{\prod_{k=i}^{r}\prod_{j=\lambda_{k+1}}^{\lambda_k}[\lambda_i+k-i-j+1]}{\prod_{k=i}^{r}[\lambda_i+k-i-\lambda_{k+1}+1]}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=i}^{r}\prod_{j=\lambda_{k+1}}^{\lambda_k}[\lambda_i+k-i-j+1] \\
&= \prod_{k=i}^{r}[\lambda_i+k-i-\lambda_k+1][\lambda_i+k-i-\lambda_k+2]\dots[\lambda_i+k-i-\lambda_{k+1}+1] \\
&= \prod_{k=i}^{r}\frac{[\lambda_i+k-i-\lambda_{k+1}+1]!}{[\lambda_i+k-i-\lambda_k]!} \\
&= \frac{[\lambda_i-\lambda_{i+1}+1]![\lambda_i-\lambda_{i+2}+2]!\dots[\lambda_i+r-i-\lambda_{r+1}+1]!}{[0]![\lambda_i-\lambda_{i+1}+1]!\dots[\lambda_i+r-i-\lambda_r]!} \\
&= [\lambda_i+r-i-\lambda_{r+1}+1]! \\
&= [\lambda_i+r-i+1]!
\end{aligned}$$

であるので

$$
\begin{aligned}
\prod_{x\in\lambda}[h_\lambda(x)] &= \prod_{i=1}^{r}\frac{[\lambda_i-i+r+1]!}{\prod_{k=i}^{r}[\lambda_i+k-i-\lambda_{k+1}+1]} \\
&= \prod_{i=1}^{r}\frac{[\lambda_i-i+r+1]!}{\prod_{k=i+1}^{r+1}[\lambda_i+k-i-\lambda_k]} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{r}[\lambda_i-i+r+1]!}{\prod_{1\le i<k\le r+1}[\lambda_i+k-i-\lambda_k]} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{r}[\lambda_i-i+r+1]!}{\prod_{1\le i<k\le r}[\lambda_i+k-i-\lambda_k]\prod_{1\le i\le r}[\lambda_i+r+1-i]} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{r}[\lambda_i-i+r]!}{\prod_{1\le i<k\le r}[\lambda_i+k-i-\lambda_k]} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{r}[\lambda_i-i+r]!}{\prod_{1\le i<j\le r}[\lambda_i-\lambda_j+j-i]}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

定理 4.11 の証明 命題 5.10, 補題 6.4-(i),(ii) より

$$
\begin{aligned}
F(P(\lambda),\omega_\lambda;q) &= \det\left(\frac{1}{(q;q)_{\lambda_i+j-i}}\right)_{1\le i,j\le r} \\
&= \frac{q^{b(\lambda)}\prod_{1\le i<j\le r}[\lambda_i-\lambda_j+j-i]}{(1-q)^m\prod_{i=1}^{r}[\lambda_i+r-i]!} \\
&= \frac{q^{b(\lambda)}}{(1-q)^m\prod_{x\in\lambda}[h_\lambda(x)]} \\
&= \frac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{x\in\lambda}(1-q^{h_\lambda(x)})}
\end{aligned}
$$

となり成立.

系 6.5. λ: partition, $\omega_0\in\mathcal{L}(P(\lambda))$ に対して

$$
F(P(\lambda),\omega_0;q)=\frac{1}{\prod_{x\in\lambda}(1-q^{h_\lambda(x)})}.
$$

$(\because)$ $g:\mathcal{A}(P(\lambda),\omega_0)\to\mathcal{A}(P(\lambda),\omega_\lambda)$ を

$$
g(\varphi)((i,j)) := \varphi((i,j))+i-1
$$

で定義すると, g は全単射で

$$
|g(\varphi)| = |\varphi|+b(\lambda)
$$

となることが容易に分かる.
従って

$$\begin{aligned}
F(P(\lambda), \omega_\lambda; q) &= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P(\lambda), \omega_\lambda)} q^{|\varphi|} \\
&= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P(\lambda), \omega_0)} q^{|g(\varphi)|} \\
&= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P(\lambda), \omega_0)} q^{|\varphi| + b(\lambda)} \\
&= q^{b(\lambda)} F(P(\lambda), \omega_0; q).
\end{aligned}$$

よって 定理 4.11 より

$$F(P(\lambda), \omega_0; q) = \frac{1}{\prod_{x \in \lambda}(1 - q^{h_\lambda(x)})}.$$

となり成立. □

7　補足

7.1　問 10 の解答

ここでは, P: 有限集合, $w : P \to \mathbb{Z}$ に対して

$$F(P,q) := \sum_{x\in P} q^{w(P)}$$

とおき, 命題 2.16 に関連した問 10 の解答となる次の命題の証明を目的とする.

命題 7.1. $m \geq 2$, $0 \leq r \leq m-1$ に対して

$$\tilde{P}_r := \{x \in P; w(x) \equiv r \pmod{m}\}, \quad \zeta := e^{\frac{2\pi i}{m}}$$

とおくと

$$F(\tilde{P}_r, q) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} F(P, q, \zeta^k).$$

従って, 特に

$$|\tilde{P}_r| = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} F(P, \zeta^k).$$

証明の前に補題を一つ示す.

補題 7.2. 記号は 命題 2.16 と同じとする.

(i) $s \not\equiv 0 \pmod{m}$ のとき

$$\sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{ks} = 0.$$

(ii) $0 \leq r, s \leq m-1$ に対して

$$\sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} \zeta^{ks} = m\delta_{rs}.$$

ただし δ_{rs} はクロネッカーの δ とする[24].

($\because$) (i) $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ より $\zeta^m = 1$ であるので

$$\zeta^{sm} = 1.$$

従って

$$0 = 1 - \zeta^{sm} = (1-\zeta^s)(1 + \zeta^s + \zeta^{2s} + \cdots + \zeta^{(m-1)s})$$

[24] i.e. $\delta_{rs} = 1$ if $r = s$, $\delta_{rs} = 0$ if $r \neq s$.

ここで $s \not\equiv 0 \pmod m$ より $\zeta^s \neq 1$ であるので

$$1 + \zeta^s + \zeta^{2s} + \cdots + \zeta^{(m-1)s} = 0.$$

(ii) $r \neq s$ のときには $0 \leq r, s \leq m-1$ より $s - r \not\equiv 0 \pmod m$ となることと (i) の結果を用いると

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} \zeta^{ks} &= \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{rm+(s-r)k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{(s-r)k} \\
&= \begin{cases} m & \text{if } r = s, \\ 0 & \text{if } r \neq s \end{cases} \\
&= m\delta_{rs}. \qquad \square
\end{aligned}$$

以上の準備のもとで 命題 7.1 の証明を行う.

命題 7.1 の証明

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} F(P, q, \zeta^k) &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} \sum_{x \in P} q^{w(x)} \zeta^{kw(x)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{x \in \tilde{P}_s} q^{w(x)} \zeta^{kw(x)} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{x \in \tilde{P}_s} q^{w(x)} \zeta^{ks} \\
&= \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{x \in \tilde{P}_s} q^{w(x)} \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{r(m-k)} \zeta^{ks}.
\end{aligned}$$

補題 7.2 より

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{x \in \tilde{P}_s} q^{w(x)} m\delta_{rs} \\
&= \sum_{x \in \tilde{P}_r} q^{w(x)} \\
&= F(\tilde{P}_r, q)
\end{aligned}$$

となり成立. $\square$

7.2 定理 4.7 の証明

ここでは, 定理 4.7 の証明を目的とする.

まず, P の linear extension τ (i.e. $\tau \in \mathcal{L}(P)$) に関する (P,ω)-partition といったものの定義を行い, 定理 4.7 の証明のための準備をする.

定義 7.3 (τ に関する (P,ω)-partition)**.** P: finite poset, $|P| = n$, ω: P の labeling, $\tau \in \mathcal{L}(P)$ とする.
$\varphi : P \to \mathbb{N}$ が次の (a), (b) を満たすとき φ を τ に関する (P,ω)-partition と呼び, その全体の集合を $\mathcal{A}(P,\omega,\tau)$ で表す.

(a) $\varphi(\tau^{-1}(1)) \geq \varphi(\tau^{-1}(2)) \geq \cdots \geq \varphi(\tau^{-1}(n))$.

(b) $\omega(\tau^{-1}(i)) > \omega(\tau^{-1}(i+1)) \Rightarrow \varphi(\tau^{-1}(i)) > \varphi(\tau^{-1}(i+1))$.

注意 7.4.

(i) 現時点では τ に関する (P,ω)-partition が (P,ω)-partition であることは自明ではない. しかし実際はもちろん成立する（次の命題参照）.

(ii) (a),(b) の条件は次の (a)',(b)' としても良い.

(a)' $i \leq j \Rightarrow \varphi(\tau^{-1}(i)) \geq \varphi(\tau^{-1}(j))$.
(b)' $i < j$, $\omega(\tau^{-1}(i)) > \omega(\tau^{-1}(j)) \Rightarrow \varphi(\tau^{-1}(i)) > \varphi(\tau^{-1}(j))$.

命題 7.5. P: finite poset, ω: P の labeling とする.

(i)
$$\mathcal{A}(P,\omega) = \bigcup_{\tau \in \mathcal{L}(P)} \mathcal{A}(P,\omega,\tau).$$

(ii) $\tau, \mu \in \mathcal{L}(P)$ に対して
$$\mathcal{A}(P,\omega,\tau) \cap \mathcal{A}(P,\omega,\mu) = \emptyset \text{ if } \tau \neq \mu.$$

($\because$) (i) まず, 左辺 $\supseteq$ 右辺を示す.
$\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega,\tau)$, $x \leq y$ in P とする.
$\tau \in \mathcal{L}(P)$ より
$$\tau(x) \leq \tau(y).$$
従って $\tau(x) = i$, $\tau(y) = j$ とおくと $i \leq j$ であるので (a)' の条件より
$$\varphi(x) = \varphi(\tau^{-1}(i)) \geq \varphi(\tau^{-1}(j)) = \varphi(y).$$
さらに, $\omega(x) > \omega(y)$ のときは, $i < j$, $\omega(\tau^{-1}(i)) > \omega(\tau^{-1}(j))$ であるので (b)' の条件より
$$\varphi(x) = \varphi(\tau^{-1}(i)) > \varphi(\tau^{-1}(j)) = \varphi(y).$$
従って $\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega)$ となり, 左辺 $\supseteq$ 右辺が成立.

次に, 左辺 $\subseteq$ 右辺を示す.
$\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega)$, $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} B_i &:= \{x \in P; \varphi(x) = i\} (= \varphi^{-1}(i)), \\ b_i &:= |B_i|, \\ m &:= \max\{\varphi(x); x \in P\} \end{aligned}$$

とおき[25], $\tau : P \to \{1, 2, \ldots, n\}$ を $x \in P$ に対して, $x \in B_i$ のとき

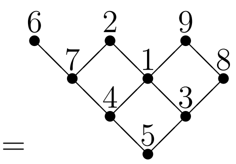
$$\tau(x) := \sum_{k=i+1}^{m} b_k + |\{z \in B_i; \omega(z) \leq \omega(x)\}|$$

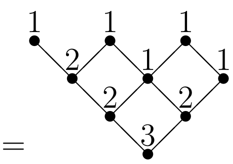
で定義する. i.e.

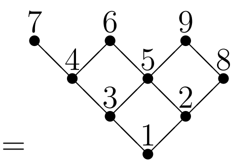
$$\begin{aligned} &\varphi(x) < \varphi(y) \Rightarrow \tau(x) > \tau(y), \\ &\varphi(x) = \varphi(y), \omega^{-1}(x) < \omega^{-1}(y) \Rightarrow \tau(x) < \tau(y) \end{aligned}$$

を満たすように τ を定義している.

例

$\omega =$ 

, $\varphi =$ 

$\Rightarrow \tau =$ 

Step 1. $\tau \in \mathcal{L}(P)$ を示す.
$\tau(P) = \{1, 2, \ldots, n\}$ は定義より容易であるので,

$$x < y \Rightarrow \tau(x) < \tau(y)$$

のみを示す.
$x < y$ in P とする.
$i := \varphi(x)$, $j := \varphi(y)$ とおき, 2 つの場合にわけて考える.
Case 1. $i \neq j$ のとき
$\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega)$ であるので $x < y$ より

$$i = \varphi(x) \geq \varphi(y) = j.$$

従って $i > j$ となるので, τ の定義より

$$\tau(x) \leq b_i + b_{i+1} + \cdots + b_m < \tau(y).$$

Case 2. $i = j$ のとき
もし $\tau(x) > \tau(y)$ ならば τ の定義より

$$|\{z \in B_i; \omega(z) \leq \omega(x)\}| > |\{z \in B_i; \omega(z) \leq \omega(y)\}|$$

[25] $x, y \in B_i, x < y \Rightarrow \omega(x) < \omega(y)$ に注意.

となるので

$$\omega(x) > \omega(y).$$

従って $x < y$, $\omega(x) > \omega(y)$, $\varphi \in \mathcal{A}(P, \omega)$ より

$$i = \varphi(x) > \varphi(y) = j$$

となり $i = j$ に矛盾.
よって

$$\tau(x) < \tau(y).$$

Step 2. $\varphi \in \mathcal{A}(P, \omega, \tau)$ を示す.
$i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して $i = b_{k+1} + b_{k+2} + \cdots + b_m + t$, $t \in \{1, 2, \ldots, b_k\}$ のときは τ の定義より

$$\begin{aligned}
&\varphi(\tau^{-1}(i)) = k, \\
&\varphi(\tau^{-1}(i+1)) \begin{cases} = k & \text{if } t < b_k \\ < k & \text{if } t = b_k \end{cases}
\end{aligned}$$

となるので

$$\varphi(\tau^{-1}(i)) \geq \varphi(\tau^{-1}(i+1)).$$

さらに $\omega(\tau^{-1}(i)) > \omega(\tau^{-1}(i+1))$ のとき.
もし $\varphi(\tau^{-1}(i)) = k = \varphi(\tau^{-1}(i+1))$ ならば

$$\tau^{-1}(i), \tau^{-1}(i+1) \in B_k.$$

従って τ の定義より

$$\begin{aligned}
i &= \tau(\tau^{-1}(i)) = b_{k+1} + b_{k+2} + \cdots + b_m + |\{z \in B_k; \omega(z) \leq \omega(\tau^{-1}(i))\}|, \\
i+1 &= \tau(\tau^{-1}(i+1)) = b_{k+1} + b_{k+2} + \cdots + b_m + |\{z \in B_k; \omega(z) \leq \omega(\tau^{-1}(i+1))\}|.
\end{aligned}$$

故に $i < i+1$ より

$$\omega(\tau^{-1}(i)) < \omega(\tau^{-1}(i+1))$$

となり, 仮定に反する.
従って

$$\varphi(\tau^{-1}(i)) > \varphi(\tau^{-1}(i+1)).$$

よって, 左辺 $\subseteq$ 右辺が成立.
(ii) 対偶

$$\mathcal{A}(P, \omega, \tau) \cap \mathcal{A}(P, \omega, \mu) \neq \emptyset \Rightarrow \tau = \mu$$

を示す.

$$\varphi \in \mathcal{A}(P, \omega, \tau) \cap \mathcal{A}(P, \omega, \mu)$$

とする.
このとき, $\tau \neq \mu$ と仮定し, 矛盾を導く.
$x_1, x_2, \ldots, x_n \in P$ を

$$x_i := \tau^{-1}(i) \text{ for } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

として定義する (i.e. $\tau(x_i)=i$).
ここで, もし
$$\mu(x_1)<\mu(x_2)<\cdots<\mu(x_n)$$
ならば $\mu\in\mathcal{L}(P)$ より
$$\mu(x_i)=i \quad \text{for } i\in\{1,2,\ldots,n\}.$$
i.e. $\tau=\mu$ となり $\tau\neq\mu$ に反する.
従って
$$\exists i\in\{1,2,\ldots,n-1\} \text{ s.t. } \mu(x_i)(=:a)>\mu(x_{i+1})(=:b).$$
Case 1. $\omega(x_i)>\omega(x_{i+1})$ のとき (i.e. $\omega(\tau^{-1}(i))>\omega(\tau^{-1}(i+1))$).
$\varphi\in\mathcal{A}(P,\omega,\tau)$ より
$$\varphi(x_i)>\varphi(x_{i+1}).$$
他方, $\varphi\in\mathcal{A}(P,\omega,\mu)$, $a>b$ より
$$\varphi(x_i)=\varphi(\mu^{-1}(a))\leq\varphi(\mu^{-1}(b))=\varphi(x_{i+1})$$
となり矛盾.
Case 2. $\omega(x_{i+1})>\omega(x_i)$ のとき (i.e. $\omega(\mu^{-1}(b))>\omega(\mu^{-1}(a))$).
$\varphi\in\mathcal{A}(P,\omega,\mu)$, $b<a$, $\omega(\mu^{-1}(b))>\omega(\mu^{-1}(a))$ であるので, (b)' の条件より
$$\varphi(x_{i+1})=\varphi(\mu^{-1}(b))>\varphi(\mu^{-1}(a))=\varphi(x_i).$$
他方, $\varphi\in\mathcal{A}(P,\omega,\tau)$ より
$$\varphi(x_i)=\varphi(\tau^{-1}(i))\geq\varphi(\tau^{-1}(i+1))=\varphi(x_{i+1})$$
となり矛盾.
従って, いずれの場合にも矛盾が生じるので (ii) が成立する. □

以上の準備の下で 定理 4.7 を示す.

定理 4.7 の証明 まず $\tau\in\mathcal{L}(P)$ に対して, 次の等式を示す.
$$\sum_{\varphi\in\mathcal{A}(P,\omega,\tau)} q^{|\varphi|}=\frac{q^{\mathrm{maj}(\omega\circ\tau^{-1})}}{(q;q)_n}. \tag{14}$$
$\mathcal{A}(P,\omega,\tau)$ の定義より, $\varphi:P\to\mathbb{N}$ に対して
$$\begin{aligned}\varphi\in\mathcal{A}(P,\omega,\tau) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\varphi(\tau^{-1}(i))\geq\varphi(\tau^{-1}(i+1)) \text{ for } i\in\{1,2,\ldots,n-1\},\\ \text{“}\omega(\tau^{-1}(i))>\omega(\tau^{-1}(i+1))\Rightarrow\varphi(\tau^{-1}(i))>\varphi(\tau^{-1}(i+1))\text{”}\end{array}\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\varphi(\tau^{-1}(i))\geq\varphi(\tau^{-1}(i+1)) \text{ for } i\in\{1,2,\ldots,n-1\},\\ \text{“}i\in D(\omega\circ\tau^{-1})\Rightarrow\varphi(\tau^{-1}(i))>\varphi(\tau^{-1}(i+1))\text{”}\end{array}\end{aligned}$$
従って
$$\sum_{\varphi\in\mathcal{A}(P,\omega,\tau)} q^{|\varphi|}=\sum_{a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0, a_i>a_{i+1} \text{if } i\in D(\omega\circ\tau^{-1})} q^{a_1+a_2+\cdots+a_n}.$$

$(\varphi(\tau^{-1}(i)) \leftrightarrow a_i)$
ここで

$$\begin{aligned} f: \quad & \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{N}^n; b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n\} \\ & \to \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n; a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, a_i > a_{i+1} \text{ if } i \in D(\omega \circ \tau^{-1})\} \end{aligned}$$

を次で定義する.

$$\begin{aligned} & e_i := |\{j \in \{1, 2, \ldots, n\}; i \leq j, j \in D(\omega \circ \tau^{-1})\}| \text{ for } i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ & f((b_1, b_2, \ldots, b_n)) := (b_1 + e_1, b_2 + e_2, \ldots, b_n + e_n). \end{aligned}$$

このとき f は全単射で,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})$$

となっていることが容易にわかる.
従って

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega,\tau)} q^{|\varphi|} &= \sum_{b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0} q^{b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})} \\ &= q^{\mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})} \lim_{m \to \infty} \sum_{0 \leq c_1 \leq \cdots \leq c_n \leq m} q^{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \\ &= q^{\mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})} \lim_{m \to \infty} \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} \quad (\because \text{ 注意 2.6-(iii), 命題 2.12}) \\ &= q^{\mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})} \lim_{m \to \infty} \frac{(1-q^{m+n})(1-q^{m+n-1}) \ldots (1-q^{m+1})}{(1-q)(1-q^2) \ldots (1-q^n)} \\ &= \frac{q^{\mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})}}{(q;q)_n}. \end{aligned}$$

よって (14) の成立が示された.
故に 命題 7.5 と (14) より

$$\begin{aligned} F(P, \omega; q) &= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega)} q^{|\varphi|} \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{L}(P)} \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P,\omega,\tau)} q^{|\varphi|} \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{L}(P)} \frac{q^{\mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})}}{(q;q)_n} \\ &= \frac{\sum_{\tau \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})}}{(q;q)_n}. \qquad \square \end{aligned}$$

7.3 cocharge と major index

ここでは, 実際に手動で計算するときに major index よりも利用しやすい cocharge と呼ばれるものについて述べる.

定義 7.6 (cocharge)**.** $\sigma \in S_n$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して

$$\begin{aligned} c_i(\sigma) &:= \begin{cases} 0 & \text{if } i = 1, \\ c_{i-1}(\sigma) + \delta(\sigma^{-1}(i-1) < \sigma^{-1}(i)) & \text{if } i > 1, \end{cases} \\ \mathrm{coch}(\sigma) &:= \sum_{i=1}^{n} c_i(\sigma) \end{aligned}$$

とおく.
ここで

$$\delta(*) := \begin{cases} 1 & \text{if } * \text{ is true}, \\ 0 & \text{if } * \text{ is false}. \end{cases}$$

$\mathrm{coch}(\sigma)$ を σ の cocharge と呼ぶ.

例 7.7.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して $\sigma(i)$ の下に $c_i(\sigma)$ を記入すると

$$\begin{matrix} 5 & 4 & 6 & 1 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{matrix}$$

即ち

$$c_1(\sigma) = 0,\ c_2(\sigma) = 1,\ c_3(\sigma) = 1,\ c_4(\sigma) = 1,\ c_5(\sigma) = 1,\ c_6(\sigma) = 2,\ c_7(\sigma) = 3$$

であり,

$$\mathrm{coch}(\sigma) = 9.$$

補題 7.8. (i) $\sigma \in S_n$ に対して

$$\mathrm{maj}(\sigma) = \mathrm{coch}(\pi_0 \sigma^{-1}).$$

(ii) P: finite poset, ω: P の labeling に対して

$$\sum_{\tau \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(\omega \circ \tau^{-1})} = \sum_{\tau \in \mathcal{L}(P^*)} q^{\mathrm{coch}(\tau \circ \omega^{-1})}.$$

ここで, P^*: P の dual poset[26].

[26] i.e. $P = P^*$ as a set, $x \leq y$ in $P^* \Leftrightarrow x \geq y$ in P.

$(\because)$ (i) $c_i(\sigma)$ の定義より $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ に対して

$$\begin{aligned} c_i(\sigma) &= c_{i-1}(\sigma) + \delta(\sigma^{-1}(i-1) < \sigma^{-1}(i)) \\ &= c_1(\sigma) + \sum_{k=2}^{i} \delta(\sigma^{-1}(k-1) < \sigma^{-1}(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \delta(\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1)) \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} \mathrm{coch}(\pi_0\sigma^{-1}) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(\pi_0\sigma^{-1}) \\ &= \sum_{i=2}^{n} c_i(\pi_0\sigma^{-1}) \\ &= \sum_{i=2}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} \delta(\sigma\pi_0(k) < \sigma\pi_0(k+1)) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} \delta(\sigma\pi_0(k) < \sigma\pi_0(k+1)) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} \delta(\sigma(n+1-k) < \sigma(n-k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} \delta(\sigma(n+1-k) < \sigma(n-k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\delta(\sigma(n+1-k) < \sigma(n-k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k\delta(\sigma(k) > \sigma(k+1)) \\ &= \mathrm{maj}(\sigma). \end{aligned}$$

(ii) $|P| = n$ とする.
$\mathcal{L}(P)$ と P^* の定義より, $\tau : P \to \{1, 2, \ldots, n\}$ (全単射) に対して

$$\begin{aligned} \pi_0\tau \in \mathcal{L}(P) &\Leftrightarrow \text{“}x < y \text{ in } P \Rightarrow \pi_0\tau(x) < \pi_0\tau(y)\text{”} \\ &\Leftrightarrow \text{“}x > y \text{ in } P^* \Rightarrow n+1-\tau(x) < n+1-\tau(y)\text{”} \\ &\Leftrightarrow \text{“}x > y \text{ in } P^* \Rightarrow \tau(x) > \tau(y)\text{”} \\ &\Leftrightarrow \tau \in \mathcal{L}(P^*) \end{aligned}$$

従って (i) より

$$
\begin{aligned}
\sum_{\tau\in\mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(\omega\circ\tau^{-1})} &= \sum_{\tau\in\mathcal{L}(P^*)} q^{\mathrm{maj}(\omega\circ(\pi_0\tau)^{-1})} \\
&= \sum_{\tau\in\mathcal{L}(P^*)} q^{\mathrm{maj}((\omega\circ\tau^{-1})\pi_0)} \\
&= \sum_{\tau\in\mathcal{L}(P^*)} q^{\mathrm{coch}(\tau\circ\omega^{-1})}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

従って 定理 4.7 は次の形としても表せる.

系 7.9. P: poset, $|P| = n$, ω: P の labeling に対して

$$F(P,\omega;q) = \frac{\sum_{\tau\in\mathcal{L}(P^*)} q^{\mathrm{coch}(\tau\circ\omega^{-1})}}{(q;q)_n}.$$

ここで, $(q;q)_n := (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)$ for $n \in \mathbb{P}$ とする.

次も成立する.

命題 7.10. P: finite poset, $|P| = n$, ω: P の labeling に対して

$$F(P,\omega;\frac{1}{q}) = (-1)^n q^n F(P,\omega^*;q).$$

ここで, $\omega^* := \pi_0 \circ \omega$.

($\because$) まず $\sigma \in S_n$ に対して

$$
\begin{aligned}
c'_i(\sigma) &:= \begin{cases} 0 & \text{if } i = 1, \\ c'_{i-1}(\sigma) + \delta(\sigma^{-1}(i-1) > \sigma^{-1}(i)) & \text{if } i > 1, \end{cases} \\
\mathrm{ch}(\sigma) &:= \sum_{i=1}^{n} c'_i(\sigma)
\end{aligned}
$$

とおくと, coch, ch の定義より, $\sigma \in S_n$ に対して

$$\mathrm{ch}(\sigma) + \mathrm{coch}(\sigma) = \binom{n}{2},\ \mathrm{ch}(\sigma) = \mathrm{coch}(\sigma\pi_0)$$

の成立が容易にわかる.

従って

$$\begin{aligned}
F(P,\omega;\frac{1}{q}) &= \frac{\sum_{\tau\in\mathcal{L}(P)} q^{-\mathrm{coch}(\tau\circ\omega^{-1})}}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\dots(1-q^{-n})} \\
&= (-1)^n q^{\binom{n+1}{2}} \frac{\sum_{\tau\in\mathcal{L}(P)} q^{-\mathrm{coch}(\tau\circ\omega^{-1})}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} \\
&= (-1)^n q^n \frac{\sum_{\tau\in\mathcal{L}(P)} q^{\binom{n}{2}-\mathrm{coch}(\tau\circ\omega^{-1})}}{(q;q)_n} \\
&= (-1)^n q^n \frac{\sum_{\tau\in\mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{ch}(\tau\circ\omega^{-1})}}{(q;q)_n} \\
&= (-1)^n q^n \frac{\sum_{\tau\in\mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{coch}(\tau\circ\omega^{-1}\pi_0)}}{(q;q)_n} \\
&= (-1)^n q^n \frac{\sum_{\tau\in\mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{coch}(\tau\circ(\pi_0\circ\omega)^{-1})}}{(q;q)_n} \\
&= (-1)^n q^n \frac{\sum_{\tau\in\mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{coch}(\tau\circ(\omega^*)^{-1})}}{(q;q)_n} \\
&= (-1)^n q^n F(P,\omega^*;q). \qquad \Box
\end{aligned}$$

7.4 Schur function と Jacobi-Trudi identity

ここでは Schur function と Jacobi-Trude identity について述べることを目的とする. まず, これまで混乱を避けるために partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ といえば

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 1, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{P}$$

を満たすものとして定義してきたが, 以下では次の本来の定義を用いることとする.

定義 7.11 (partition)**.** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{N}^r$ に対して

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0, \quad (|\lambda| :=) \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$$

のとき λ を n の partition と呼び,

$$\lambda \vdash n$$

で表し,

$$\ell(\lambda) := |\{i; \lambda_i \geq 1\}|$$

とおき, $\ell(\lambda)$ を λ の長さと呼ぶ.
さらに partition $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$ と partition $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0)$ を同一視して考えることとする. 尚, 0 の partition (0) は $\emptyset$ で表されることが多い.

例 7.12.

$$\lambda = (3,3,1) = (3,3,1,0) = (3,3,1,0,0,0,0,0) \vdash 7, \quad \ell(\lambda) = 3, \quad \emptyset = (0) = (0,0,0) \vdash 0.$$

以下, $x_1, x_2, \dots$ を複素数値をとる変数とする.

定義 7.13 (semi-standard tableau)**.** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$: partition, $\lambda \neq \emptyset$, $U \subseteq \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{SSTab}(\lambda, U) \quad := \quad \{T \in \mathrm{Tab}(\lambda); & T_{i,j} \in U (\forall (i,j) \in \lambda), \\ & T_{i,j} \leq T_{i,j+1} \text{ if } (i,j), (i,j+1) \in \lambda, \\ & T_{i,j} < T_{i+1,j} \text{ if } (i,j), (i+1,j) \in \lambda\} \end{aligned}$$

とおき, $n \in \mathbb{P}$, $T \in \mathrm{SSTab}(\lambda, \{1, 2, \dots, n\})$ に対して

$$\begin{aligned} x^T \quad &:= \quad \prod_{(i,j) \in \lambda} x_{T_{i,j}}, \\ s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad &:= \quad \sum_{T \in \mathrm{SSTab}(\lambda, \{1,2,\dots,n\})} x^T \end{aligned}$$

とおく[27].
さらに,

$$s_\emptyset(x_1, x_2, \dots, x_n) := 1$$

として定義する.
$\mathrm{SSTab}(\lambda, \mathbb{P})$ の元は (shape λ) の semi-standard tableau と呼ばれ, $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は Schur function と呼ばれている[28].

[27] $A_k(T) := |\{(i,j) \in \lambda; T_{i,j} = k\}|$ $(k \in \mathbb{P})$ とおくと $x^T = \prod_{k \in \mathbb{P}} x_k^{A_k(T)}$ とも表せる. $s_\lambda(x_1, x_2, \dots)$ を定義するためには, 形式的ベキ級数の議論が必要となるので今回は見送ることとする.

[28] λ: partition, $n < \ell(\lambda)$ のとき $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ である.

注意 7.14.

$$\lim_{n\to\infty} s_\lambda(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}) = F(P(\lambda), \omega_\lambda; q) = \frac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{x\in\lambda}(1 - q^{h_\lambda(x)})}.$$

例 7.15.

$$\begin{aligned}
\mathrm{SSTab}((2,1), \{1,2,3\}) &= \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\}, \\
s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2.
\end{aligned}$$

次に Schur function の行列式表示として知られている Jacobi-Trudi identity と呼ばれる等式の紹介を行う.

少しだけ定義を行う.

定義 7.16 (complete, elementary symmetric function)**.** $r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned}
h_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) :&= \begin{cases} \sum_{1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_r\le n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r} & \text{if } r > 0, \\ 1 & \text{if } r = 0, \\ 0 & \text{if } r < 0, \end{cases} \\
(&= s_{(r)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{if } r \ge 0) \\
e_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) :&= \begin{cases} \sum_{1\le i_1< i_2<\cdots< i_r\le n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_r} & \text{if } r > 0, \\ 1 & \text{if } r = 0, \\ 0 & \text{if } r < 0 \end{cases} \\
(&= s_{(1,1,\ldots,1)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{if } r \ge 0 \quad (1 \text{ は } r \text{ 個}))
\end{aligned}$$

とおく.
$h_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $e_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ はそれぞれ complete symmetric function, elementary symmetric function と呼ばれる.

例 7.17.

$$\begin{aligned}
&h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
&h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\
&e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.
\end{aligned}$$

このとき次の成立が知られている (cf. §7 in [3]) [29].

定理 7.18 (Jacobi-Trudi identity)**.** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: partition に対して次が成立する.

(i)
$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det(h_{\lambda_i - i + j}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_{1\le i,j\le n}. \tag{15}$$

[29]実際には skew Schur function に対して記述されている.

(ii)

$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1\le i,j\le n}}{\det(x_i^{n-j})_{1\le i,j\le n}}. \tag{16}$$

定理 7.19 (dual Jacobi-Trudi identity)**.** $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: partition, $\lambda_1 \le n$ に対して

$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det(e_{\lambda'_i-i+j}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_{1\le i,j\le n}. \tag{17}$$

注意 7.20.

(i) ほとんどの文献においては (15) か (16) のいずれかを Jacobi-Trudi identity と呼んでいる. 文献によってどちらを呼ぶかが異なるので少し注意が必要である[30].

(ii) (15) は前述の lattice path method を用いて証明できる.

(iii) (16) はこの後で証明をつけ, (17) に関しても略証をつける.

注意 7.21. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: partition に対して h_r, e_r の定義より $\ell(\lambda) = r$ のときには

$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det(h_{\lambda_i-i+j}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_{1\le i,j\le r}, \tag{18}$$

$\ell(\lambda') = r \le n$ のときには[31]

$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det(e_{\lambda'_i-i+j}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_{1\le i,j\le r} \tag{19}$$

とも書ける.

定理 7.18 より次が容易に得られる.

系 7.22. λ: partition に対して

$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = s_\lambda(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \quad (\forall \sigma \in S_n)$$

以下, この節では Jacobi-Trudi identity を示すことを目的とする. そのためには次の命題を示せばよい[32].

命題 7.23. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: partition に対して次が成立する.

$$\det(h_{\lambda_i-i+j}(x_1, x_2, \ldots, x_n))_{1\le i,j\le n} = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1\le i,j\le n}}{\det(x_i^{n-j})_{1\le i,j\le n}}. \tag{20}$$

(20) の証明の前に補題を 2 つ示そう.

---

[30] Schur function の最初の定義としては (16) ということらしい.

[31] i.e. $\lambda_1 = s \le n$.

[32] ただし, ここでの証明は「とりあえず証明を与えた」というだけであるということを理解して頂けるとありがたい.

補題 7.24. $n \in \mathbb{P}$, $-n+1 \le r$ に対して次が成立する.

$$h_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{r+n-1}}{\prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}}(x_k - x_i)}. \tag{21}$$

この命題の証明には, 次のファンデルモンドの行列式と呼ばれる等式が非常に役立つ[33].

$$\det(x_i^{n-j})_{1\le i,j\le n} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j). \tag{22}$$

Proof of 補題 7.24 $r \le 0$ のとき.
$1 \le i, j \le n$ に対して

$$a_{ij} := \begin{cases} x_i^{r+n-1} & \text{if } j = 1, \\ x_i^{n-j} & \text{if } j \ge 2 \end{cases}$$

とおき, $\det(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を 1 列に関して展開して (22) を用いると

$$\det(a_{ij})_{1\le i,j\le n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x_k^{r+n-1}\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}}(x_i - x_j)$$

と書けることより

$$\begin{aligned}
(21)\text{ の右辺} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{r+n-1}}{\prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}}(x_k - x_i)} \\
&= \frac{1}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^{r+n-1}\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)}{\prod_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne k}}(x_k - x_i)} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x_k^{r+n-1}\prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}}(x_i - x_j)}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)} \\
&= \frac{\det(a_{ij})_{1\le i,j\le n}}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)}.
\end{aligned}$$

ここで $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ は $-n+1 \le r < 0$ のときには 1 列と $-r+1$ 列が一致するので

$$\det(a_{ij})_{1\le i,j\le n} = 0.$$

さらに, $r = 0$ のときには $(a_{ij})_{1\le i,j\le n} = (x_i^{n-j})_{1\le i,j\le n}$ となるので (22) より

$$\det(a_{ij})_{1\le i,j\le n} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j).$$

[33] この等式のは, 線形代数の問題として一度は証明を試みていると思われるので証明の詳細は略とするが, 例えば, 1 列から 2 列を x_n 倍したものを引き, 2 列から 3 列を x_n 倍したものを引き, $\ldots$, $n-1$ 列から n 列を x_n 倍したものを引き, n 行に関して展開して, 各行から $x_i - x_n$ を取り出し, n に関する帰納法を用いると証明できる.

従って

$$
(21)\text{ の右辺} = \begin{cases} 0 & \text{if } -n+1 \leq r < 0, \\ 1 & \text{if } r = 0 \end{cases} = h_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)
$$

となり (21) が成立.
以下, $r \geq 1$ のときに, n に関する帰納法で (21) を示す.

$n = 1$ のとき.

$$
(21)\text{ の右辺} = \sum_{k=1}^{1} \frac{x_1^{r+1-1}}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq 1 \\ i \neq k}} (x_k - x_i)} = x_1^r = h_r(x_1)
$$

となり成立.

$n = 2$ のとき.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2} \frac{x_k^{r+2-1}}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ i \neq k}} (x_k - x_i)} &= \frac{x_1^{r+1}}{x_1 - x_2} + \frac{x_2^{r+1}}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{x_1^{r+1} - x_2^{r+1}}{x_1 - x_2} \\
&= \sum_{i,j \geq 0, i+j=r} x_1^i x_2^j \\
&= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_r \leq 2} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r} \\
&= h_r(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

となり成立.
$n-1$ まで成立したと仮定し, n のときの成立を示す ($n \geq 3$).
ここで, さらに r に関する帰納法を用いる.
$r = 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n} x_{i_1} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 \leq n-1} x_{i_1} + x_n
\end{aligned}
$$

n に関する帰納法の仮定と $r=0$ の結果より

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^{1+n-2}}{\prod_{\substack{1\le i\le n-1 \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} + x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{n-1}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^{n-1}(x_k-x_n)}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} + x_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^{n-1}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} + \frac{x_n^{n-1}}{\prod_{1\le i\le n-1}(x_n-x_i)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^{n}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} + \frac{x_n^{n}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne n}}(x_n-x_i)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{n}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)}
\end{aligned}
$$

となり成立.
$r-1$ まで成立したと仮定し, r のときの成立を示す $(r \ge 2)$.

$$
\begin{aligned}
h_r(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_r\le n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_r} \\
&= \sum_{1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_r\le n-1} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_r} + x_n \sum_{1\le i_1\le i_2\le\cdots\le i_{r-1}\le n} x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{r-1}}
\end{aligned}
$$

n と r に関する帰納法の仮定より

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^{r+n-2}}{\prod_{\substack{1\le i\le n-1 \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} + x_n \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{r+n-2}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^{r+n-2}(x_k-x_n)}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} + x_n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^{r+n-2}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} + \frac{x_n^{r+n-2}}{\prod_{1\le i\le n-1}(x_n-x_i)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k^{r+n-1}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)} + \frac{x_n^{r+n-1}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne n}}(x_n-x_i)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{r+n-1}}{\prod_{\substack{1\le i\le n \\ i\ne k}}(x_k-x_i)}.
\end{aligned}
$$

従って, n と r に関する帰納法で (21) の成立が示された. □

以下

$$
\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1, \\ \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j) & \text{if } n \ge 2 \end{cases}, \quad \Delta() := 1
$$

とし, $\widehat{a}$ といった記号で a がないことを意味することとする. 例えば

$$
\begin{aligned}
&(a_1, \widehat{a_2}, a_3, a_4, \widehat{a_5}) = (a_1, a_3, a_4),\\
&\Delta(x_1, x_2, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n) = \prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ i, j \ne k}} (x_i - x_j),\\
&\Delta(x_1, \widehat{x_2}) = \Delta(x_1) = 0,\\
&\Delta(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = 1
\end{aligned}
$$

ということである.

補題 7.25. $n \ge 1$ のとき

$$
\prod_{i=1}^{n} \Delta(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)^{n-2}.
$$

Proof. n に関する帰納法で示す.
$n = 1, 2$ のときには両辺共に 1 となり成立.
$n-1$ まで成立していると仮定し, n のときを示す ($n \ge 3$).

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \Delta(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \Delta(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)\\
&= \Delta(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \left(\Delta(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n-1}) \prod_{\substack{1 \le k \le n-1 \\ k \ne i}} (x_k - x_n) \right)\\
&= \Delta(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \Delta(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{1 \le k \le n-1 \\ k \ne i}} (x_k - x_n)
\end{aligned}
$$

帰納法の仮定より

$$
\begin{aligned}
&= \Delta(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})^{n-2} \prod_{i=1}^{n-1} (x_k - x_n)^{n-2}\\
&= \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)^{n-2}\\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}
$$

従って, 帰納法により成立することが示された. □

以上の準備の下で (20) の証明を行う.

命題 7.23 の証明 $1 \le i, j \le n$ のとき $-n+1 \le \lambda_i - i + j$ であるので補題 7.24 より

$$
\begin{aligned}
h_{\lambda_i - i + j}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{\lambda_i - i + j + n - 1}}{\prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne k}} (x_k - x_i)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x_k^{\lambda_i - i + j + n - 1} \Delta(x_1, x_2, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n)}{\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)}
\end{aligned}
$$

としてよい. 従って

$$
\begin{aligned}
&\det(h_{\lambda_i-i+j}(x_1,x_2,\dots,x_n))_{1\le i,j\le n}\\
&=\det\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x_k^{\lambda_i-i+j+n-1}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_k},\dots,x_n)}{\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)}\right)_{1\le i,j\le n}\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x_k^{\lambda_i-i+\sigma(i)+n-1}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_k},\dots,x_n)}{\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{1\le k_1,k_2,\dots,k_n\le n}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{k_i+1}x_{k_i}^{\lambda_i-i+\sigma(i)+n-1}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_{k_i}},\dots,x_n)}{\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)}\\
&=\sum_{1\le k_1,k_2,\dots,k_n\le n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(-1)^{k_i+1}x_{k_i}^{\lambda_i-i+n}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_{k_i}},\dots,x_n)}{\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)^n}\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}x_{k_i}^{\sigma(i)-1}\\
&=\sum_{1\le k_1,k_2,\dots,k_n\le n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(-1)^{k_i+1}x_{k_i}^{\lambda_i-i+n}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_{k_i}},\dots,x_n)}{\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)^n}\det(x_{k_i}^{j-1})_{1\le i,j\le n}\\
&=\sum_{1\le k_1,k_2,\dots,k_n\le n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(-1)^{k_i+1}x_{k_i}^{\lambda_i-i+n}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_{k_i}},\dots,x_n)}{\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)^n}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta(x_{k_1},x_{k_2},\dots,x_{k_n})
\end{aligned}
$$

$k_i=k_j$ $(i\ne j)$ のときには0となるので

$$
=\sum_{\tau\in S_n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(-1)^{\tau(i)+1}x_{\tau(i)}^{\lambda_i-i+n}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_{\tau(i)}},\dots,x_n)}{\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)^n}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Delta(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\dots,x_{\tau(n)}).
$$

ここで $\tau\in S_n$ に対して, $\{\tau(1),\tau(2),\dots,\tau(n)\}=\{1,2,\dots,n\}$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\Delta(x_{\tau(1)},x_{\tau(2)},\dots,x_{\tau(n)})\prod_{i=1}^{n}(-1)^{\tau(i)+1}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_{\tau(i)}},\dots,x_n)\\
&\quad=\mathrm{sgn}(\tau)\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)(-1)^{\sum_{i=1}^{n}i+n}\prod_{i=1}^{n}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&\det(h_{\lambda_i-i+j}(x_1,x_2,\dots,x_n))_{1\le i,j\le n}\\
&=\sum_{\tau\in S_n}\frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{n}i+n+\frac{n(n-1)}{2}}\mathrm{sgn}(\tau)\prod_{i=1}^{n}\Delta(x_1,x_2,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)\prod_{i=1}^{n}x_{\tau(i)}^{\lambda_i-i+n}}{\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)^{n-1}}
\end{aligned}
$$

補題 7.25 より

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{n} i+n+\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} x_{\tau(i)}^{\lambda_i-i+n}}{\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\
&= \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{n} i+\sum_{i=1}^{n} i} \det(x_j^{\lambda_i-i+n})_{1\le i,j\le n}}{\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\
&= \frac{\det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1\le i,j\le n}}{\det(x_i^{n-j})_{1\le i,j\le n}}
\end{aligned}
$$

となり成立. □

最後に 定理 7.19 [dual Jacobi-Trudi identity] の略証を行う.

定理 7.19 の証明 $\lambda = (\lambda_1(=: r), \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: partition とする. (V, E) は 補題 5.12 と同じとし, weight は

$$x_{((i,j),(i+1,j))} := x_{i+j}, \quad x_{((i,j),(i,j+1))} := 1$$

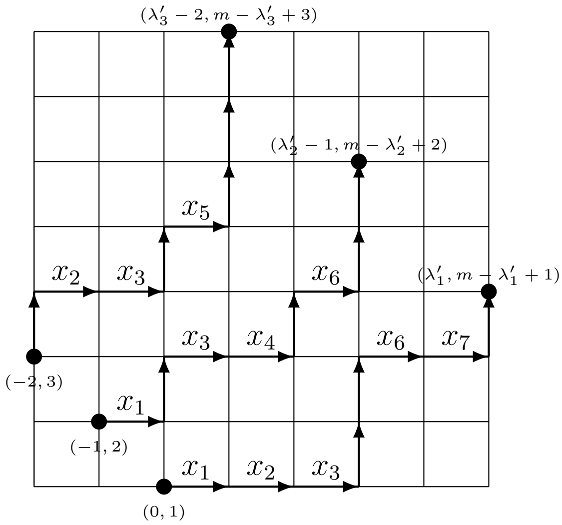
とする. さらに $m \in \mathbb{N}$, $m \ge r$ に対して

$$
\begin{aligned}
u_i &:= (-i+1, i) \text{ for } i \in \{1, 2, \ldots, r\}, \\
v_i &:= (\lambda_i' - i + 1, m - \lambda_i' + i) \text{ for } i \in \{1, 2, \ldots, r\}, \\
\mathbf{u} &:= (u_1, u_2, \ldots, u_r), \\
\mathbf{v} &:= (v_1, v_2, \ldots, v_r)
\end{aligned}
$$

とおくと $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は D-compatible で, $\mathrm{SSTab}(\lambda, \{1, 2, \ldots, m\})$ と $P^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ の元が 1 対 1 に対応していることが容易に分かる.

例えば $\lambda = (3, 3, 3, 2, 1)$ (i.e. $\lambda' = (5, 4, 3)$), $m = 8$ のとき次が対応している.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 6 & \\ \cline{1-2} 7 & & \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{P} =$$



さらに, この対応で $x^T = \mathrm{wt}(\mathbf{P})$ となっているので

$$F^0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{P}\in P^0(\mathbf{u},\mathbf{v})} \mathrm{wt}(\mathbf{P}) = \sum_{T\in \mathrm{SSTab}(\lambda,\{1,2,\ldots,m\})} x^T = s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

ここで

$$F((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \sum_{a_1+a_2\le j_1<j_2<\cdots<j_{b_1-a_1}\le b_1+b_2-1} x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_{b_1}-j_{b_2}}$$

となることが容易に分かるので

$$\begin{aligned} F(u_i,v_j) &= F((-i+1,i),(\lambda'_j-j+1,m-\lambda'_j+j)) \\ &= \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_{\lambda'_j-j+i}\le m} x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_{b_1}-j_{b_2}} \\ &= e_{\lambda'_j-j+i}(x_1,x_2,\dots,x_m). \end{aligned}$$

従って, lattice path method より

$$\begin{aligned} s_\lambda(x_1,x_2,\dots,x_m) &= \det(e_{\lambda'_i-j+i}(x_1,x_2,\dots,x_m))_{1\le i,j\le r} \\ &= \det(e_{\lambda'_i-j+i}(x_1,x_2,\dots,x_m))_{1\le i,j\le n} \end{aligned}$$

となり成立する. □

7.5 $s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1})$

ここでは次を 2 種類の方法で示すことを目的とする.

命題 7.26 (定理 7.21.2 in [3]). $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathrm{Par}$ に対して[34]

$$s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{n-1}) = q^{b(\lambda)} \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{1-q^{n+j-i}}{1-q^{h_\lambda(i,j)}}.$$

ただし, Par: partition 全体の集合, $b(\lambda) = \sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$, $h_\lambda(i,j)$: λ の (i,j) に対する hook length とする.

以下, 命題 5.10, 補題 5.11 で拡張した記号 i.e. $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(q;q)_a := \begin{cases} (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^a) & \text{if } a > 0, \\ 1 & \text{if } a = 0, \\ \infty & \text{if } a < 0. \end{cases}$$

$a, m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{bmatrix} a+m \\ a \end{bmatrix} := \begin{cases} \frac{[a+m]!}{[a]![m]!} & \text{if } a, m \geq 0, \\ 0 & \text{if } a < 0 \text{ or } m < 0. \end{cases}$$

とする.

まずは, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathrm{Par}$ に対して

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{1\leq i,j\leq n}}{\det(x_i^{n-j})_{1\leq i,j\leq n}} \tag{23}$$

と書けるといったことを用いた証明を行う.

その前に補題をひとつだけ示す.

補題 7.27. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathrm{Par}$ に対して

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{(q;q)_{\lambda_i-i+n}}{(q;q)_{n-i}} = \prod_{(i,j)\in\lambda} (1-q^{n+j-i}).$$

$(\because)$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} \frac{(q;q)_{\lambda_i-i+n}}{(q;q)_{n-i}} &= \prod_{i=1}^{n} (1-q^{n+1-i})(1-q^{n+2-i})\dots(1-q^{n+\lambda_i-i}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \prod_{1\leq j\leq \lambda_i} (1-q^{n+j-i}) \\ &= \prod_{(i,j)\in\lambda} (1-q^{n+j-i}) \end{aligned}$$

[34] $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$

となり成立. □

命題 7.26 の証明 (23) より

$$
\begin{aligned}
s_\lambda(1,q,\dots,q^{n-1}) &= \frac{\det(q^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})_{1\le i,j\le n}}{\det(q^{(i-1)(n-j)})_{1\le i,j\le n}} \\
&= \frac{\det((q^{\lambda_j+n-j})^{i-1})_{1\le i,j\le n}}{\det((q^{i-1})^{n-j})_{1\le i,j\le n}}
\end{aligned}
$$

ファンデルモンドの行列式より

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(q^{\lambda_j+n-j}-q^{\lambda_i+n-i})}{\prod_{1\le i<j\le n}(q^{i-1}-q^{j-1})} \\
&= \frac{\prod_{1\le i<j\le n} q^{\lambda_j+n-j}\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{\lambda_i-\lambda_j-i+j})}{\prod_{1\le i<j\le n} q^{i-1}\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{j-i})} \\
&= \frac{q^{\sum_{j=1}^n (j-1)(\lambda_j+n-j)}\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{\lambda_i-\lambda_j-i+j})}{q^{\sum_{i=1}^n (n-i)(i-1)}\prod_{j=2}^n (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{j-1})} \\
&= \frac{q^{\sum_{j=1}^n (j-1)\lambda_j}\prod_{1\le i<j\le n}(1-q^{\lambda_i-\lambda_j-i+j})}{\prod_{j=2}^n (q;q)_{j-1}} \times \frac{\prod_{i=1}^n (q;q)_{\lambda_i+n-i}}{\prod_{i=1}^n (q;q)_{\lambda_i+n-i}}
\end{aligned}
$$

補題 6.4-(ii) より

$$
= \frac{q^{b(\lambda)}\prod_{i=1}^n (q;q)_{\lambda_i+n-i}}{\prod_{j=1}^n (q;q)_{n-j}\prod_{(i,j)\in\lambda}(1-q^{h_\lambda(i,j)})}
$$

補題 7.27 より

$$
= q^{b(\lambda)}\prod_{(i,j)\in\lambda}\frac{1-q^{n+j-i}}{1-q^{h_\lambda(i,j)}}
$$

となり成立. □

次に lattice path method を用いた証明を行う. その前に補題をひとつ示そう.

補題 7.28. (i) $m\ge\mathbb{N}$, $a,k\in\mathbb{Z}$ に対して

$$
\begin{bmatrix} a+m+k \\ a+k \end{bmatrix} - q^m \begin{bmatrix} a+m+k-1 \\ a+k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+m+k-1 \\ a+k \end{bmatrix} \tag{24}
$$

(ii) $1\le n$ に対して

$$
\det\left(\begin{bmatrix} a_i+n+j-1 \\ a_i+j \end{bmatrix}\right)_{1\le i,j\le n} = \prod_{i=1}^n \frac{(q;q)_{a_i+n}}{(q;q)_{n-i}} \times \det\left(\frac{1}{(q;q)_{a_i+j}}\right)_{1\le i,j\le n}.
$$

$(\because)$ (i) は定義に従って計算すれば容易に得られるので略とする.

(ii)

$$A := \left(\begin{bmatrix} a_i+n+j-1 \\ a_i+j \end{bmatrix} \right)_{1\le i,j\le n}$$

とおき, 行列式の基本変形を利用して証明を行う. 以下ここでは, k 列を α 倍して l 列から引く操作を $H_\alpha(k,l)$ で表すことにする. まず, A の第 i 行は最初は

$$\left(\begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n+1 \\ a_i+2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n+2 \\ a_i+3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n+3 \\ a_i+4 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_i+2n-1 \\ a_i+n \end{bmatrix} \right)$$

となっている. そこで

$$H_{q^{n-1}}(n-1,n), H_{q^{n-1}}(n-2,n-1), H_{q^{n-1}}(n-3,n-2), \dots, H_{q^{n-1}}(1,2)$$

を順に行うと（i.e. A の第 $n-1$ 行を q^{n-1} 倍して第 n 行から引き, 第 $n-2$ 行を q^{n-1} 倍して第 $n-1$ 行から引き, 第 $n-3$ 行を q^{n-1} 倍して第 $n-2$ 行から引き, 第 1 行を q^{n-1} 倍して第 2 行から引くと）(24) より A の第 i 行は

$$\left(\begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n+1 \\ a_i+3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n+2 \\ a_i+4 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_i+2n-2 \\ a_i+n \end{bmatrix} \right)$$

次に

$$H_{q^{n-2}}(n-1,n), H_{q^{n-2}}(n-2,n-1), H_{q^{n-2}}(n-3,n-2), \dots, H_{q^{n-2}}(2,3)$$

を順に行うと A の第 i 行は

$$\left(\begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n+1 \\ a_i+4 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_i+2n-3 \\ a_i+n \end{bmatrix} \right)$$

以下, 同様に

$$\begin{aligned}
&H_{q^{n-3}}(n-1,n), H_{q^{n-3}}(n-2,n-1), H_{q^{n-3}}(n-3,n-2), \dots, H_{q^{n-3}}(3,4), \\
&H_{q^{n-4}}(n-1,n), H_{q^{n-4}}(n-2,n-1), H_{q^{n-4}}(n-3,n-2), \dots, H_{q^{n-4}}(4,5), \\
&\dots \\
&H_{q^{n-k}}(n-1,n), H_{q^{n-k}}(n-2,n-1), H_{q^{n-k}}(n-3,n-2), \dots, H_{q^{n-k}}(k,k+1), \\
&\dots \\
&H_{q^1}(n-1,n)
\end{aligned}$$

を行うと, 結局 A の第 i 行は

$$\left(\begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+4 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+n \end{bmatrix} \right)$$

となる. これらの操作は全て行列の基本変形なので行列式は変わらない.
従って

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(\begin{bmatrix} a_i+n \\ a_i+j \end{bmatrix}\right)_{1\le i,j\le n} \\
&= \det\left(\frac{(q;q)_{a_i+n}}{(q;q)_{a_i+j}(q;q)_{n-j}}\right)_{1\le i,j\le n} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^n (q;q)_{a_i+n}}{\prod_{j=1}^n (q;q)_{n-j}} \det\left(\frac{1}{(q;q)_{a_i+j}}\right)_{1\le i,j\le n} \\
&= \prod_{i=1}^n \frac{(q;q)_{a_i+n}}{(q;q)_{n-i}} \times \det\left(\frac{1}{(q;q)_{a_i+j}}\right)_{1\le i,j\le n}
\end{aligned}$$

となり成立. □

命題 7.26 の証明 lattice path method と 補題 5.12 より

$$s_\lambda(1,q,q^2,\ldots,q^{n-1}) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda_i - i + n - 1 \\ \lambda_i - i + j \end{bmatrix}\right)_{1\le i,j\le n}$$

従って, 補題 7.28-(ii), 補題 7.27-(iii) と補題 6.4-(i),(ii) より成立が示せる. □

系 7.29. $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Par}$ に対して

$$|\mathrm{SSTab}(\lambda, \{1,2,\ldots,n\})| = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{n+j-i}{h_\lambda(i,j)}$$

($\because$) 命題 7.26 より

$$s_\lambda(1,q,q^2,\ldots,q^{n-1}) = q^{b(\lambda)} \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{[n+j-i]}{[h_\lambda(i,j)]}.$$

とも書けるので

$$|\mathrm{SSTab}(\lambda, \{1,2,\ldots,n\})| = s_\lambda(1,1,\ldots,1) = \prod_{(i,j)\in\lambda} \frac{n+j-i}{h_\lambda(i,j)}$$

となり成立. □

7.6 Cauchy identity

ここではこれまでに示したことを用いて次の等式の証明を目的とする[35].

定理 7.30 (Cauchy identity cf.(7.44) in [3])**.** $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \{x \in \mathbb{C}; |x| < 1\}$ に対して

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}} s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m) s_\lambda(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}.$$

ただし, Par: partition 全体の集合とする.

一般に
$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0) = s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$
であることが定義より容易に分かるので $m = n$ の場合のみ示せばよい.

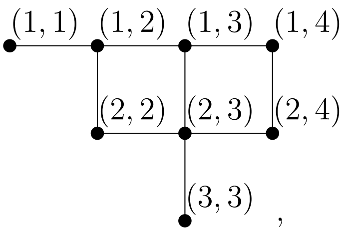
少し準備を行う. 以下 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は順序が $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \geq c, b \geq d$ で定義された poset とする.

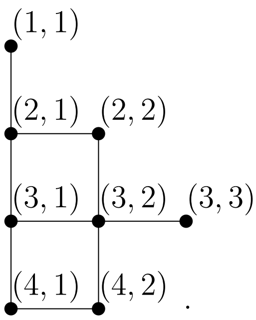
記号 7.31. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$: strict partition[36] に対して, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の subposet[37] $P^{(r)}(\alpha)$, $P^{(l)}(\alpha)$ を

$$P^{(r)}(\alpha) := \cup_{i=1}^{m} \{(i, j); i \leq j \leq \alpha_i + i\},$$
$$P^{(l)}(\alpha) := \cup_{i=1}^{m} \{(j, i); i \leq j \leq \alpha_i + i\}$$

で定義する. $P^{(r)}(\alpha)$ と $P^{(l)}(\alpha)$ は元の個数が $|\alpha| + m$ 個の同型な poset である.

例 7.32.

$P^{(r)}((3, 2, 0)) =$ 

, $P^{(l)}((3, 2, 0)) =$ 

.

さらに labeling を次で定義する.

記号 7.33. $P^{(r)}(\alpha)$ の labeling $\omega_\alpha^{(r)}$, $P^{(l)}(\alpha)$ の labeling $\omega_\alpha^{(l)}$ を

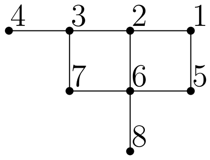
$$\omega_\alpha^{(r)}((i, j)) := \sum_{k=1}^{i} \alpha_k + 2i - j, \qquad \omega_\alpha^{(l)}((j, i)) := \sum_{k=i+1}^{m} \alpha_k - 2i + j + m + 1$$

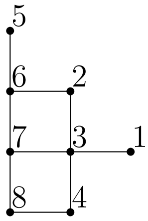
で定義する[38].

---

[35] [3] には RSK-algorithm を用いた bijective proof が掲載されている.
[36] i.e. $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_m \geq 0$.
[37] i.e. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の subset で順序は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ での順序で定義された poset.
[38] 実は, (P, ω)-partition が右に $\leq$, 下に $<$ となるような labeling であれば何でも良い.

例 7.34.

$\omega^{(r)}_{(3,2,0)} =$ 

, $\omega^{(l)}_{(3,2,0)} =$ 

.

このとき次が成立する.

命題 7.35. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$: strict partition, $0 \leq k_1 < \cdots < k_m$ に対して次が成立する.

(i)

$$\sum_{\substack{\varphi \in \mathcal{A}(P^{(r)}(\alpha), \omega^{(r)}_\alpha) \\ \varphi((i,i)) = k_i \ \ (i=1,2,\ldots,m)}} q^{|\varphi|} = \frac{q^{\sum_{i=1}^m k_i} \det(q^{\alpha_i k_j})_{1 \leq i,j \leq m}}{\prod_{i=1}^m (q;q)_{\alpha_i}}.$$

(ii)

$$\sum_{\substack{\varphi \in \mathcal{A}(P^{(l)}(\alpha), \omega^{(l)}_\alpha) \\ \varphi((i,i)) = k_i \ \ (i=1,2,\ldots,m)}} q^{|\varphi|} = \frac{q^{\sum_{i=1}^m \binom{\alpha_i+1}{2} + \sum_{i=1}^m k_i} \det(q^{\alpha_i k_j})_{1 \leq i,j \leq m}}{\prod_{i=1}^m (q;q)_{\alpha_i}}.$$

($\because$) (i) (V, E) と weight は 補題 5.12 と同じとし, $M \in \mathbb{N}$, $M \geq m-1$ に対して

$$\begin{aligned} u_i &:= (0, k_i) \text{ for } i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ v_i &:= (\alpha_i, M) \text{ for } i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ \mathbf{u} &:= (u_1, u_2, \ldots, u_m), \\ \mathbf{v} &:= (v_1, v_2, \ldots, v_m) \end{aligned}$$

とおくと $\mathbf{u}$ と $\mathbf{v}$ は D-compatible で,

$$\{\varphi \in \mathcal{A}(P^{(r)}(\alpha), \omega^{(r)}_\alpha); \varphi(x) \leq m \ (\forall x \in P^{(r)}(\alpha)), \varphi((i,i)) = k_i \ (1 \leq i \leq m)\}$$

と $P^0(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ の元が 1 対 1 に対応しているといったことが容易に分かり[39], lattice path method を用いて成立が示せる.

(ii)

$$\begin{aligned} g : &\{\varphi \in \mathcal{A}(P^{(r)}(\alpha), \omega^{(r)}_\alpha); \varphi((i,i)) = k_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)\} \\ &\to \{\varphi \in \mathcal{A}(P^{(l)}(\alpha), \omega^{(l)}_\alpha); \varphi((i,i)) = k_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)\} \end{aligned}$$

を

$$g(\varphi)((i,j)) := \varphi((i,j)) + i - j$$

[39]ただし, φ と $\mathbf{P}$ が対応しているときには $q^{|\varphi|} = q^{\sum_{i=1}^m k_i} \mathrm{wt}(\mathbf{P})$ となっているので注意が必要.

で定義すると, g は全単射で

$$|g(\varphi)| = |\varphi| + \sum_{i=1}^{m} \binom{\alpha_i + 1}{2}$$

となることが分かるので, (i) を用いて成立が示せる. $\square$

系 7.36. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$: strict partitions に対して次が成立する.

$$\sum_{0 \le k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_m} \det(q^{\alpha_i k_j})_{1 \le i,j \le m} \det(q^{\beta_i k_j})_{1 \le i,j \le m} = \frac{\prod_{1 \le i < j \le m}(q^{\alpha_j} - q^{\alpha_i})(q^{\beta_j} - q^{\beta_i})}{\prod_{i,j=1}^{m}(1 - q^{\alpha_i + \beta_j})}.$$

($\because$) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の subposet $P(\alpha, \beta)$ を

$$P(\alpha, \beta) := P^{(r)}(\alpha) \cup P^{(l)}(\beta)$$

で定義すると,

$$\exists \lambda\text{: parition s.t. } P(\lambda) = P(\alpha, \beta)$$

である[40]. 従って, $P(\lambda)$ の q-hook length formula より

$$\begin{aligned}
F(P(\alpha,\beta), \omega_\lambda; q) &= \frac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{x \in P(\lambda)}(1 - q^{h(x)})} \\
&= \frac{q^{\sum_{i=1}^{m}(i-1)(\alpha_i + \beta_i) + \sum_{i=1}^{m}\binom{\beta_i+1}{2} + \binom{m}{2}} \prod_{1 \le i < j \le m}(1 - q^{\alpha_i - \alpha_j})(1 - q^{\beta_i - \beta_j})}{\prod_{i=1}^{m}(q;q)_{\alpha_i}(q;q)_{\beta_i} \prod_{i,j=1}^{m}(1 - q^{\alpha_i + \beta_j + 1})} \\
&= \frac{q^{\sum_{i=1}^{m}\binom{\beta_i+1}{2} + \binom{m}{2}} \prod_{1 \le i < j \le m}(q^{\alpha_j} - q^{\alpha_i})(q^{\beta_j} - q^{\beta_i})}{\prod_{i=1}^{m}(q;q)_{\alpha_i}(q;q)_{\beta_i} \prod_{i,j=1}^{m}(1 - q^{\alpha_i + \beta_j + 1})}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

他方, $\varphi((i,i)) = k_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ と固定して和をとり, ω_λ と $\omega_\alpha^{(r)}$, $\omega_\beta^{(r)}$ に注意して 命題 7.35 を用いると

$$\begin{aligned}
F(P(\alpha,\beta), \omega_\lambda; q) &= \sum_{0 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_m} q^{-\sum_{i=1}^{m} k_i} \Big(\sum_{\substack{\varphi \in \mathcal{A}(P^{(r)}(\alpha), \omega_\alpha^{(r)}) \\ \varphi((i,i)) = k_i \ (i=1,2,\ldots,m)}} q^{|\varphi|} \Big) \Big(\sum_{\substack{\psi \in \mathcal{A}(P^{(l)}(\beta), \omega_\beta^{(l)}) \\ \psi((i,i)) = k_i \ (i=1,2,\ldots,m)}} q^{|\psi|} \Big) \\
&= \sum_{0 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_m} \frac{q^{\sum_{i=1}^{m}\binom{\beta_i+1}{2} + \sum_{i=1}^{m} k_i} \det(q^{\alpha_i k_j})_{1 \le i,j \le m} \det(q^{\beta_i k_j})_{1 \le i,j \le m}}{\prod_{i=1}^{m}(q;q)_{\alpha_i}(q;q)_{\beta_i}}. \qquad (26)
\end{aligned}$$

[40]厳密には $\lambda = (\alpha|\beta)$: Frobenius notation である.

よって (25), (26) より

$$\sum_{0\le k_1<k_2<\cdots<k_m} q^{\sum_{i=1}^m k_i} \det(q^{\alpha_i k_j})_{1\le i,j\le m} \det(q^{\beta_i k_j})_{1\le i,j\le m} = \frac{q^{\binom{m}{2}} \prod_{1\le i<j\le m}(q^{\alpha_j}-q^{\alpha_i})(q^{\beta_j}-q^{\beta_i})}{\prod_{i,j=1}^m (1-q^{\alpha_i+\beta_j+1})}. \tag{27}$$

(27) において β_i+1 を β_i に置き換えると

$$\sum_{0\le k_1<k_2<\cdots<k_m} \det(q^{\alpha_i k_j})_{1\le i,j\le m} \det(q^{\beta_i k_j})_{1\le i,j\le m} = \frac{\prod_{1\le i<j\le m}(q^{\alpha_j}-q^{\alpha_i})(q^{\beta_j}-q^{\beta_i})}{\prod_{i,j=1}^m (1-q^{\alpha_i+\beta_j})}. \tag{28}$$

行列式の性質より

$$\sum_{0\le k_1\le k_2\le\cdots\le k_m} \det(q^{\alpha_i k_j})_{1\le i,j\le m} \det(q^{\beta_i k_j})_{1\le i,j\le m} = \frac{\prod_{1\le i<j\le m}(q^{\alpha_j}-q^{\alpha_i})(q^{\beta_j}-q^{\beta_i})}{\prod_{i,j=1}^m (1-q^{\alpha_i+\beta_j})} \tag{29}$$

となり成立. □

系 7.36 は次の成立も保証している[41].

系 7.37. $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \{x \in \mathbb{C}; |x| < 1\}$ に対して

$$\sum_{0\le k_1\le k_2\le\cdots\le k_m} \det(x_i^{k_j})_{1\le i,j\le m} \det(y_i^{k_j})_{1\le i,j\le m} = \frac{\prod_{1\le i<j\le m}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^m (1-x_i y_j)}. \tag{30}$$

定理 7.30 の証明 Jacobi-Trudi identity-(ii) (定理 7.18-(ii)) を用いて Schur function を行列式の積の形で書き換えて整理すれば, 系 7.37 より成立が示せる. □

次の成立も知られている.

定理 7.38 (Cauchy determinant identity)**.** $n \ge 1$ に対して次が成立する.

(i)

$$\det\left(\frac{1}{1-x_i y_j}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^n (1-x_i y_j)}$$

(ii)

$$\det\left(\frac{1}{x_i+y_j}\right)_{1\le i,j\le n} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{i,j=1}^n (x_i+y_j)}$$

証明は次の Dodgson（= Lewis Carroll）の定理と n に関する帰納法が有効.

[41] 直接の証明はこの節の最後に掲載

定理 7.39 (Dodgson)**.** $n \geq 2$, n 次正方行列 $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $1 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_r \leq n$, $1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_r \leq n$ に対して

$$A^{s_1,s_2,\ldots,s_r}_{t_1,t_2,\ldots,t_r} := (a_{s_i,t_j})_{1\leq i,j\leq r}$$

とおくと次が成立する.

$$\det(A)\det(A^{1,2,\ldots,n-2}_{1,2,\ldots,n-2}) = \det(A^{1,2,\ldots,n-1}_{1,2,\ldots,n-1})\det(A^{1,2,\ldots,n-2,n}_{1,2,\ldots,n-2,n}) - \det(A^{1,2,\ldots,n-1}_{1,2,\ldots,n-2,n})\det(A^{1,2,\ldots,n-2,n}_{1,2,\ldots,n-1}).$$

ただし, $n = 2$ のとき $\det(A^{1,2,\ldots,n-2}_{1,2,\ldots,n-2}) = 1$ とする.

例 7.40. $n = 2$ のとき

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det(a_{11})\det(a_{22}) - \det(a_{12})\det(a_{21}).$$

$n = 3$ のとき $n = 2$ のとき

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\det(a_{11}) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

以下, この節の最後の締めくくりとして Cor.7.37 を直接示してみよう.

証明の前に一つだけ補題を示す.

補題 7.41. $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{C}$ とする.

(i) $m \geq 2$, $-1 \leq r \leq m-1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{x_k^r}{\prod_{\substack{1\leq i\leq m \\ i\neq k}}(x_i - x_k)} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} x_i^{-1} & \text{if } r = -1, \\ 0 & \text{if } 0 \leq r \leq m-2, \\ (-1)^{m-1} & \text{if } r = m-1. \end{cases}$$

(ii)

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{x_k^{-1}\prod_{j=1}^{m}(1 - x_k y_j)}{\prod_{\substack{1\leq i\leq m \\ i\neq k}}(x_i - x_k)} = (1 - \prod_{i=1}^{m} x_i y_i)\prod_{i=1}^{m} x_i^{-1}.$$

(iii) $1 \leq s \leq m$ のとき

$$\sum_{t=1}^{m} \frac{\prod_{\substack{1\leq i\leq m \\ i\neq s}}(1 - x_i y_t)}{\prod_{\substack{1\leq i\leq m \\ i\neq t}}(y_i - y_t)} = x_s^{-1}\prod_{i=1}^{m} x_i.$$

($\because$) (i)

$$左辺 = \frac{1}{\prod_{1\le i<j\le m}(x_j - x_i)} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} x_k^r \prod_{\substack{1\le i<j\le m \\ i,j\ne k}} (x_j - x_i)$$

であり, 和の部分は i 行が

$$(x_i^r, 1, x_i, x_i^2, \ldots, x_r^{m-2})$$

の $m \times m$ 行列の行列式を 1 列に関して展開した形なので成立する.

(ii) $\exists a_0, a_1, \ldots, a_{m-2} \in \mathbb{Z}[y_1, y_2, \ldots, y_m]$ s.t.

$$x_k^{-1} \prod_{j=1}^{m} (1 - x_k y_j) = x_k^{-1} + a_0 + a_1 x_k + \cdots + a_{m-2} x_k^{m-2} + ((-1)^m \prod_{i=1}^{m} y_i) x_k^{m-1}$$

であるので, (i) より

$$左辺 = \prod_{i=1}^{m} x_i^{-1} - \prod_{i=1}^{m} y_i = (1 - \prod_{i=1}^{m} x_i y_i) \prod_{i=1}^{m} x_i^{-1} = 右辺$$

となり成立.

(iii) $\exists a_1, a_2, \ldots, a_{m-2} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, \widehat{x_s}, \ldots, x_m]$ s.t.

$$\prod_{\substack{1\le i\le m \\ i\ne s}} (1 - x_i y_t) = 1 + a_1 y_t + a_2 y_t^2 + \cdots + a_{m-2} y_t^{m-2} + ((-1)^{m-1} x_s^{-1} \prod_{i=1}^{m} x_i) y_t^{m-1}$$

であるので, (i) より

$$左辺 = x_s^{-1} \prod_{i=1}^{m} x_i = 右辺$$

となり成立. $\square$

系 7.37 の証明 素直に m に関する帰納法で示そう.
$m = 1$ のとき

$$(30) \text{ の左辺} = \sum_{0\le k_1} (x_1 y_1)^{k_1} = \frac{1}{1 - x_1 y_1} = (30) \text{ の右辺}$$

となり成立.
$m - 1$ まで成立したと仮定し m のときの成立を示す ($m \ge 2$).

(30) の左辺

$$= \sum_{0\le k_1} (\prod_{i=1}^{m} x_i y_i)^{k_1} \sum_{0\le k_2\le\cdots\le k_m} \left(\det(x_i^{k_j})_{1\le i,j\le m} \det(y_i^{k_j})_{1\le i,j\le m} \right)\Big|_{k_1=0}$$

($j \geq 2$ に対して k_j を $k_j + k_1$ と置き換えて整理した)

$$= \frac{1}{1 - \prod_{i=1}^{m} x_i y_i} \sum_{s=1}^{m} (-1)^{s+1} \sum_{t=1}^{m} (-1)^{t+1} \sum_{0 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m} \det(x_i^{k_{j+1}})_{\substack{1 \leq i \leq m, i \neq s \\ 1 \leq j \leq m-1}} \det(y_i^{k_{j+1}})_{\substack{1 \leq i \leq m, i \neq t \\ 1 \leq j \leq m-1}}$$

帰納法の仮定より

$$= \frac{1}{1 - \prod_{i=1}^{m} x_i y_i} \sum_{s=1}^{m} (-1)^{s+1} \sum_{t=1}^{m} (-1)^{t+1} \frac{\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq m \\ i,j \neq s}} (x_j - x_i) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq m \\ i,j \neq t}} (y_j - y_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq s}} \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq t}} (1 - x_i y_j)}$$

整理すると

$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{(1 - \prod_{i=1}^{m} x_i y_i) \prod_{i,j=1}^{m} (1 - x_i y_j)} \sum_{s=1}^{m} \sum_{t=1}^{m} \frac{\prod_{j=1}^{m} (1 - x_s y_j) \prod_{i=1}^{m} (1 - x_i y_t)}{(1 - x_s y_t) \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq s}} (x_i - x_s) \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq t}} (y_i - y_t)}$$

$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{(1 - \prod_{i=1}^{m} x_i y_i) \prod_{i,j=1}^{m} (1 - x_i y_j)} \sum_{s=1}^{m} \frac{\prod_{j=1}^{m} (1 - x_s y_j)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq s}} (x_i - x_s)} \sum_{t=1}^{m} \frac{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq s}} (1 - x_i y_t)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq t}} (y_i - y_t)}$$

Lem.7.41-(iii) より

$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{(1 - \prod_{i=1}^{m} x_i y_i) \prod_{i,j=1}^{m} (1 - x_i y_j)} \sum_{s=1}^{m} \frac{x_s^{-1} \prod_{i=1}^{m} x_i \prod_{j=1}^{m} (1 - x_s y_j)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq s}} (x_i - x_s)}$$

Lem.7.41-(ii) より

$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^{m} (1 - x_i y_j)}.$$

従って, 帰納法により成立が証明された. □

7.7 multivaliable q-hook length formula

ここでは q-hook length formula の多変数化についての最近の結果の最も簡単な場合の概略を述べることを目的とする[42].

まず (4.11) の多変数版として次が成立する.

命題 7.42. λ: partition, $\varphi \in \mathcal{A}(P(\lambda), \omega_\lambda)$ に対して

$$\mathbf{q}^\varphi := \prod_{(i,j)\in\lambda} q_{j-i}^{\varphi((i,j))}$$

とおき, $(i,j) \in \lambda$ に対して

$$\begin{aligned} H_\lambda(i,j) : &= \{(s,j) \in \lambda; i \le s\} \cup \{(i,t) \in \lambda; j \le t\}, \\ \mathbf{q}^{H_\lambda(i,j)} : &= \prod_{(s,t)\in H_\lambda(i,j)} q_{t-s} \end{aligned}$$

とおき, $\varphi_0 \in \mathcal{A}(P(\lambda), \omega_\lambda)$ を

$$\varphi_0((i,j)) = i-1$$

で定義すると

$$\sum_{\varphi\in\mathcal{A}(P(\lambda),\tau)} \mathbf{q}^\varphi = \frac{\mathbf{q}^{\varphi_0}}{\prod_{x\in\lambda}(1-\mathbf{q}^{H_\lambda(x)})}.$$

例 7.43. $\lambda = (2,2)$, $\varphi \in \mathcal{A}(\lambda, \tau)$ に対して $\varphi((1,1)) = a$, $\varphi((1,2)) = b$, $\varphi((2,1)) = c$, $\varphi((2,2)) = d$ とすると

$$\mathbf{q}^\varphi = q_0^a q_1^b q_{-1}^c q_0^d = q_{-1}^c q_0^{a+d} q_1^b,$$

$$\begin{aligned} &H_\lambda(1,1) = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}, && \mathbf{q}^{H_\lambda(1,1)} = q_0 q_1 q_{-1}, \\ &H_\lambda(1,2) = \{(1,2),(2,2)\}, && \mathbf{q}^{H_\lambda(1,2)} = q_1 q_0, \\ &H_\lambda(2,1) = \{(2,1),(2,2)\}, && \mathbf{q}^{H_\lambda(2,1)} = q_{-1} q_0, \\ &H_\lambda(2,2) = \{(2,2)\}, && \mathbf{q}^{H_\lambda(2,2)} = q_0. \end{aligned}$$

さらに $\mathbf{q}^{\varphi_0} = q_{-1}q_0$ となるので, 命題 7.42 を適用すると

$$\sum_{\varphi\in\mathcal{A}(P((2,2)),\tau)} \mathbf{q}^\varphi = \sum_{\substack{0\le a\le b<d \\ a<c\le d}} q_{-1}^c q_0^{a+d} q_1^b = \frac{q_{-1}q_0}{(1-q_0)(1-q_{-1}q_0)(1-q_0q_1)(1-q_{-1}q_0q_1)}$$

となる.

尚, 左辺を直接計算すると

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0\le a\le b<d \\ a<c\le d}} q_{-1}^c q_0^{a+d} q_1^b &= q_{-1}q_0 \sum_{0\le a\le b\le c\le d} q_a^a q_b^b q_c^c q_d^d \\ &= q_{-1}q_0 \sum_{0\le a,b',c',d'} (q_aq_bq_cq_d)^a (q_bq_cq_d)^{b'} (q_cq_d)^{c'} q_d^{d'} \\ &= \frac{q_{-1}q_0}{(1-q_aq_bq_cq_d)(1-q_bq_cq_d)(1-q_cq_d)(1-q_d)}. \end{aligned}$$

[42]Proctor のホームページには, d-complete poset の q-hook length formula の多変数化ができたと書かれているが, 現時点ではまだどこにも発表されていないようである

多変数化ができると, これまでに知られていない hook length poset を大量に作ることができるのでとても嬉しい. 最後にそのことを少しだけまとめておこう.

定義 7.44 (hook length poset)**.** P: poset に対して,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(P): &= \{\varphi : P \to \{0,1,2,\dots\}; \text{“}x \le y \Rightarrow \varphi(x) \ge \varphi(y)\text{”}\},\\ F(P;q): &= \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P)} q^{|\varphi|}\end{aligned}$$

とおく[43]($|\varphi| = \sum_{x \in P} \varphi(x)$).
$\exists h : P \to \{1,2,\dots,\}$ s.t.

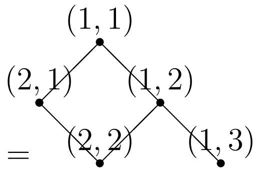
$$F(P;q) = \frac{1}{\prod_{x \in P}(1-q^{h(x)})}$$

のとき, P を hook length poset と呼ぶ.

例 7.45. λ: partition, $(i,j),(s,t) \in \lambda$ に対して

$$(i,j) \le (s,t) \Leftrightarrow i \ge s, j \le t$$

で定義すると λ は poset となる. 例えば

$(3,2) =$ 

従って, (11) より λ は hook length poset である. 他に d-complete poset と呼ばれる poset も hook length poset となることが知られている.

そこで, 上記で定義したような多変数化ができる poset を次で定義する.

定義 7.46 (multivaliable hook length poset)**.** Q: 可換変数の集合とする[44]. P: finite poset, $g : P \to Q$ に対して

$$\exists H : P \to \{\prod_{q \in Q} q^{n_q}; 各\ n_q \in \{0,1,2,\dots\}, \sum_{q \in Q} n_q < +\infty\}$$

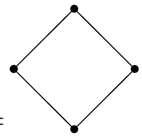
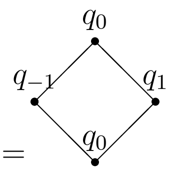
s.t.

$$(F(P;g) :=) \sum_{\varphi \in \mathcal{A}(P)} \prod_{x \in P} g(x)^{\varphi(x)} = \frac{1}{\prod_{x \in P}(1-H(x))}$$

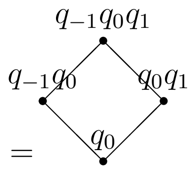
のとき P を multivaliable hook length poset (with g) と呼ぶことにする.

[43] i.e. $\mathcal{A}(P)$ は P-partition 全体の集合
[44] 例えば $Q = \{q_i; i \in \mathbb{Z}\} \cup \{p_i; i \in \mathbb{Z}\}$ といったところ

例 7.47. 例 7.43 より

$P :=$  $g :=$ 

とおくと

$H =$ 

とすることにより, P は multivaliable hook length poset with g となる.

次に poset のある元の下に他の poset を cover relation を用いてつなげてできる poset を定義する.

記号 7.48. P: poset, $x \in P$, Q: finite poset とする. $P \cap Q = \emptyset$ のとき, 新しい poset $P \begin{pmatrix} x \\ Q \end{pmatrix}$ を次で定義する.

$$P \begin{pmatrix} x \\ Q \end{pmatrix} := P \cup Q \text{ as a set,}$$

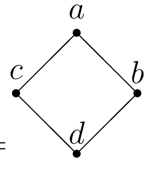
$$a \leq b \text{ in } P \begin{pmatrix} x \\ Q \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{“}a, b \in P, a \leq b \text{ in } P\text{”, or “}a, b \in Q, a \leq b \text{ in } Q\text{”,}$$
$$\text{or “}a \in Q, b \in P, x \leq b \text{ in } P\text{“.}$$

さらに, P: poset, $x_1, x_2, \ldots, x_r \in P$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$: finite poset とする. $P \cap Q_i = \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ のとき,

$$P \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_r \end{pmatrix} := P \begin{pmatrix} x_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ Q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_r \\ Q_r \end{pmatrix}$$

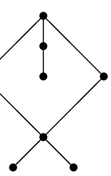
で定義する.

例 7.49.

$P =$ 

$Q_1 =$ $Q_2 =$

のとき

$P \begin{pmatrix} a & d \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} =$ 

次が成立する.

命題 7.50. P:multivaliable hook length poset with g, $q \in Q$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} = \{x \in P; g(x) = q\}$ ($x_i \neq x_j$ if $i \neq j$), $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$: hook length poset とする.

$$|Q_1| = |Q_2| = \cdots = |Q_r|,\ Q_i \cup Q_j = \emptyset\ (i \neq j), P \cap Q_i = \emptyset\ (i = 1, 2, \ldots, r)$$

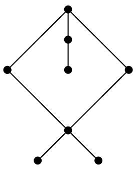
のとき

$$P\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_r \end{pmatrix}:\ \text{hook length poset}$$

である.

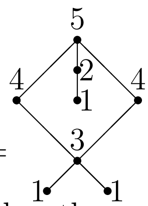
例 7.51. 例 7.49 の P は 例 7.47 より a, d で同じ weight をもつ multivaliable hook length poset であり, Q_1, Q_2 が hook length poset であることも容易に分かるので

$$P\begin{pmatrix} a & d \\ Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} =$$

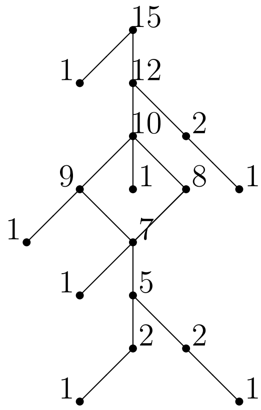


は hook length poset である. ちなみに hook length

$h =$



となる. 次のような poset も hook length poset.



もっと一般に, つなげる poset $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ も multivaliable hook length poset with $g_1, g_2, \ldots, g_r$ のときには $\prod_{x \in Q_i} g_i(x) = \prod_{x \in Q_j} g_j(x)$ $(1 \leq i, j \leq r)$ を満たせば, つながった poset も multivaliable hook length poset となることも分かっている.

7.8 q-2 項係数の特殊値

本節では $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して

$$[a]_t := [a]|_{q=t}, \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_t := \begin{cases} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\Bigg|_{q=t} & \text{if } 0 \le a \le b, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおき, 次を示すことを目的とする.

命題 7.52. $m \ge 2$, $a, b \ge 0$, $0 \le r, s < m$, $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{m}}$ に対して

$$\begin{bmatrix} ma + r \\ mb + s \end{bmatrix}_\zeta = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_\zeta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

まず, 補題を一つ示そう.

補題 7.53. 記号は Prop.7.52 と同じとする.

(i)
$$[ma + r]_\zeta = [r]_\zeta.$$

(ii)
$$\frac{[ma]_t}{[mb]_t} = \frac{[a]_{t^m}}{[b]_{t^m}}, \quad \frac{[ma]_\zeta}{[mb]_\zeta} = \frac{a}{b}.$$

(iii) $s \ge 1$ のとき
$$\begin{bmatrix} ma \\ mb + s \end{bmatrix}_\zeta = 0.$$

(iv) $r \ge 0$ のとき
$$\begin{bmatrix} ma + r \\ mb \end{bmatrix}_\zeta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

($\because$) (i) (ii) はいずれも直接計算するだけで得られるが, 下記に詳細を記載しよう.

$$[ma + r]_\zeta = \frac{1 - \zeta^{ma+r}}{1 - \zeta} = \frac{1 - (\zeta^m)^a \zeta^r}{1 - \zeta} = \frac{1 - \zeta^r}{1 - \zeta} = [r]_\zeta,$$

$$\frac{[ma]_t}{[mb]_t} = \frac{1 - t^{ma}}{1 - t^{mb}} = \frac{1 - (t^m)^a}{1 - (t^m)^b} = \frac{[a]_{t^m}}{[b]_{t^m}},$$

$$\frac{[ma]_\zeta}{[mb]_\zeta} = \frac{[a]_{\zeta^m}}{[b]_{\zeta^m}} = \frac{[a]_1}{[b]_1} = \frac{a}{b}.$$

(iii) $ma < mb+s$ のときには両辺共に 0 となり成立. $ma \geq mb+s$ のときには, $s \geq 1$ より $a > b$ となること, 及び一般に $u, v \geq 1$ に対して

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = \frac{[u]_t}{[v]_t} \begin{bmatrix} u-1 \\ v-1 \end{bmatrix}_t$$

となることに注意して計算すると

$$\begin{bmatrix} ma \\ mb+s \end{bmatrix}_t = \frac{[ma]_t[ma-1]_t \dots [ma-mb+1]_t}{[mb+s]_t[mb+s-1]_t \dots [s+1]_t} \begin{bmatrix} m(a-b) \\ s \end{bmatrix}_t .$$

ここで $c := a-b(\geq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m(a-b) \\ s \end{bmatrix}_\zeta &= \begin{bmatrix} mc \\ s \end{bmatrix}_\zeta \\ &= \frac{[mc]_\zeta[mc-1]_\zeta \dots [mc-s+1]_\zeta}{[s]_\zeta[s-1]_\zeta \dots [1]_\zeta} \\ &= \frac{[mc]_\zeta[m(c-m)+m-1]_\zeta \dots [m(c-m)+m-s+1]_\zeta}{[s]_\zeta[s-1]_\zeta \dots [1]_\zeta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり,

$$\frac{[ma]_\zeta[ma-1]_\zeta \dots [ma-mb+1]_\zeta}{[mb+s]_\zeta[mb+s-1]_\zeta \dots [s+1]_\zeta}$$

が有限確定の値をもつことが (i), (ii) より分かるので成立する.

(iv) $a < b$ のときには両辺共に 0 となり成立するので, $a \geq b$ のときの成立を b に関する帰納法で示す. $b=0$ のときには, 両辺共に 1 となり成立するので, $b-1$ まで成立したと仮定し, b のときの成立を示す. 直接計算すると

$$\begin{bmatrix} ma+r \\ mb \end{bmatrix}_t = \frac{[ma+r]_t[ma+r-1]_t \dots [ma+r-m+1]_t}{[mb]_t[mb-1]_t \dots [mb-m+1]_t} \begin{bmatrix} ma+r-m \\ mb-m \end{bmatrix}_t .$$

ここで $a' := a-1$, $b' := b-1$ とおくと

$$\begin{aligned} &\frac{[ma+r]_t[ma+r-1]_t \dots [ma+r-m+1]_t}{[mb]_t[mb-1]_t \dots [mb-m+1]_t} \\ &= \frac{[ma+r]_t[ma+r-1]_t \dots [ma+1]_t[ma]_t[ma-1]_t \dots [ma+r-m+1]_t}{[mb]_t[mb-1]_t \dots [mb-m+1]_t} \\ &= \frac{[ma+r]_t[ma+r-1]_t \dots [ma+1]_t[ma]_t[ma'+m-1]_t[ma'+m-2]_t \dots [ma'+r+1]_t}{[mb]_t[mb'+m-1]_t[mb'+m-2]_t \dots [mb'+1]_t} \end{aligned}$$

従って (i),(ii) より

$$\frac{[ma+r]_\zeta[ma+r-1]_\zeta \dots [ma+r-m+1]_\zeta}{[mb]_\zeta[mb-1]_\zeta \dots [mb-m+1]_\zeta} = \frac{a}{b}$$

となるので, 帰納法の仮定を用いると

$$\begin{bmatrix} ma+r \\ mb \end{bmatrix}_\zeta = \frac{a}{b}\begin{bmatrix} ma+r-m \\ mb-m \end{bmatrix}_\zeta = \frac{a}{b}\begin{bmatrix} m(a-1)+r \\ m(b-1) \end{bmatrix}_\zeta = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1} = \binom{a}{b}$$

となり成立. □

以上の準備のもとで Prop.7.52 を証明しよう.

Prop.7.52 の証明 Case 1. $r < s$ のとき. Lemma 7.53-(iii) より

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} ma+r \\ mb+s \end{bmatrix}_\zeta &= \frac{[ma+r]_\zeta[ma+r-1]_\zeta \dots [ma+1]_\zeta}{[mb+s]_\zeta[mb+s-1]_\zeta \dots [mb+s-r+1]_\zeta}\begin{bmatrix} ma \\ mb+s-r \end{bmatrix}_\zeta \\ &= 0 \\ &= \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_\zeta \binom{a}{b}.\end{aligned}$$

Case 2. $r \geq s$ のとき. Lemma 7.53-(i),(iv) より

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} ma+r \\ mb+s \end{bmatrix}_\zeta &= \frac{[ma+r]_\zeta[ma+r-1]_\zeta \dots [ma+r-s+1]_\zeta}{[mb+s]_\zeta[mb+s-1]_\zeta \dots [mb+1]_\zeta}\begin{bmatrix} ma+r-s \\ mb \end{bmatrix}_\zeta \\ &= \frac{[r]_\zeta[r-1]_\zeta \dots [r-s+1]_\zeta}{[s]_\zeta[s-1]_\zeta \dots [1]_\zeta}\binom{a}{b} \\ &= \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_\zeta \binom{a}{b}.\end{aligned}$$

以上により成立が示された. □

尚, 一般に $1 \leq a, b$ のときには

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_t = \frac{[a]_t}{[b]_t}\begin{bmatrix} a-1 \\ b-1 \end{bmatrix}_t$$

が成立しているので, この等式を利用して $ma+r$ に関する帰納法で一気に示すといった方針もあり得る.

問 17. $m \geq 2$, $a, b \geq 0$, $0 \leq r, s < m$, $\zeta := e^{\frac{2\pi i}{m}}$, $1 \leq k < m$ に対して

$$\begin{bmatrix} ma+r \\ mb+s \end{bmatrix}_{\zeta^k}$$

は一般にどう書けるか？

実験用 Mathematica Programing:

```
qbin[a_,b_,q_]:=0 /; a<b;
qbin[a_,a_,q_]:=1;
qbin[a_,b_,q_]:=1 /; b==0;
qbin[a_,b_,q_]:=Expand[qbin[a-1,b-1,q]+q^b*qbin[a-1,b,q]] /; a>b && b>0;
Z[m_,k_]:=Exp[2*Pi*I/m]^k;
tes[m_,k_,n_]:=
Do[Print["(",a,",",b,")=", Simplify[qbin[a,b,Z[m,k]]]],{a,0,n},{b,0,a}];
```

参考文献

[1] I. M. Gessel and S. C. Viennot *Determinants, paths, and plane partitions*, preprint, 28 July 1989.

[2] R. P. Stanley *Ordered structures and partitions*, Mem. of Amer. Math. Soc., **119** (1972).

[3] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume 2*, Cambridge Univ. Press, 1999.