Lie 環論入門* Ver. 5.0

田川 裕之 (和歌山大学教育学部)

平成 15 年 2 月 24 日

目 次

*このノートは, 和歌山大学教育学部 1998 年度前期「代数学Ａ」の講義用にまとめたものである. 尚, 改訂版を出すにあたり, 本ノートの記述および内容について多くの貴重なご意見と助言を頂きました富山大学理学部の菅谷孝先生, 京都大学理学部の菊地克彦先生に感謝致します.

1　線型代数からの準備

以下, $\mathbf{N}$: 自然数全体の集合, $\mathbf{R}$: 実数全体の集合とする.

Def. 1.1

集合 V が次の (i)〜(v) を満たす和と呼ばれる演算

$$+ : V \times V \to V$$

とスカラー倍と呼ばれる演算

$$\cdot : \mathbf{R} \times V \to V$$

が定義されているとき実ベクトル空間 ($\mathbf{R}$ 上のベクトル空間) と呼ぶ.
但し, $x, y \in V$, $a \in \mathbf{R}$ に対して

$$x + y := +(x, y), \quad ax := \cdot(a, x)$$

で表すものとする.

(i) $x + y = y + x$ for $\forall x, y \in V$ (交換法則)
(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ for $\forall x, y, z \in V$ (結合法則)
(iii) $\exists 0 \in V$ s.t. $x + 0 = 0 + x = x$ for $\forall x \in V$ (零元の存在)
(iv) $x \in V$ に対して $\exists x' \in V$ s.t. $x + x' = x' + x = 0$ (逆元の存在)
(v) $a, b \in \mathbf{R}$, $x, y \in V$ に対して

$$a(x + y) = ax + ay, \quad (a + b)x = ax + bx, \quad a(bx) = (ab)x, \quad 1x = x$$

Ex. 1.2

次は実ベクトル空間
(i) $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$,

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y'), \quad a(x, y) := (ax, ay).$$

(ii) $\mathrm{M}(2, \mathbf{R}) = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} | x, y, z, w \in \mathbf{R}\})$,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & w' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + x' & y + y' \\ z + z' & w + w' \end{pmatrix}, \quad a \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax & ay \\ az & aw \end{pmatrix}.$$

問 1

V: 実ベクトル空間に対して次の成立を示せ.
(i) 零元はただ一つである.

(ii) $x \in V$ の逆元はただ一つである.
以下 x の逆元を $-x$ と書き, $x+(-y)$ を簡単のために $x-y$ と書くことにする.
(iii) $0x = 0$ for $x \in V$.
(iv) $a0 = 0$ for $a \in \mathbf{R}$.
(v) $-x = (-1)x$ for $x \in V$.
(vi) $a(x-y) = ax - ay$ for $a \in \mathbf{R}$, $x, y \in V$.

以下この章では特に断らない限り, V を実ベクトル空間とする.

Def. 1.3

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ に対して

$$
\begin{aligned}
&x_1, x_2, \ldots, x_n : \text{ 線型従属 (or 一次従属)} \\
&\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \\
&\qquad \text{s.t. } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ の中で少なくとも一つは零でない}, \\
&\qquad\quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\
&x_1, x_2, \ldots, x_n : \text{ 線型独立 (or 一次独立)} \\
&\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ は線型従属でない} \\
&\qquad (\text{i.e } a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}) \\
&\qquad\quad \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0)
\end{aligned}
$$

Ex. 1.4

$V = \mathbf{R}^2$ に対して $(1,2)$ と $(2,4)$ は線型従属, $(1,2)$ と $(1,3)$ は線型独立

問 2

Ex.1.4 を示せ.

問 3

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ が線型独立ならば $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(1 \leq m \leq n)$ も線型独立であることを示せ.

Def. 1.5

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ に対して

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R})$$

の形の V の元は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の線型結合 (or 一次結合) と言われる.
例えば $v \in V$ は y_1, y_2, y_3 の線型結合で表されるといえば

$$\exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R} \text{ s.t. } v = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3$$

を意味する.
次の (i)〜(ii) を満たす V の部分集合 S を V の基底と呼ぶ.

(i) S の全ての有限部分集合 (元の数が有限個の部分集合) は線型独立.
(ii) V の任意の元は S の適当な有限個の元の線型結合として表される.

特に $\sharp S < \infty$ (i.e. S の元の個数が有限) となる基底が存在するとき or $V = \{0\}$ のとき
V は ($\mathbf{R}$ 上の) 有限次元ベクトル空間と呼ばれ,
そうでないとき ($\mathbf{R}$ 上の) 無限次元ベクトル空間と呼ばれる.
さらに $\sharp S = n$ のとき, V は ($\mathbf{R}$ 上の)n 次元ベクトル空間と呼ばれ,

$$\mathrm{dim} V = n$$

と書かれる ($\sharp S < \infty$ のとき $\sharp S$ は V によってのみ決定されることに注意).
言い換えると

$V:$ n 次元ベクトル空間
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
$\exists\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}:$ V の基底
$\Longleftrightarrow$
$\exists v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ s.t. $v_1, v_2, \ldots, v_n:$ 線型独立,
任意の V の元は $v_1, v_2, \ldots, v_n$ の線型結合で表せる

ということである.

Ex. 1.6
$\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(1,0),(1,1)\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底である. 従って $\mathrm{dim}\mathbf{R}^2 = 2$.

問 4
(i) $\mathrm{M}(2, \mathbf{R})$ の基底をひとつあげよ.
(ii) $\mathrm{M}(3, \mathbf{R})$ の基底をひとつあげよ.
(iii) $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ は何次元ベクトル空間か？

Def. 1.7
次の (i), (ii) を満たす V の空でない部分集合 W を V の部分空間と呼ぶ.
(i) $x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$.
(ii) $x \in W$, $a \in \mathbf{R} \Rightarrow ax \in W$.

Ex. 1.8
$\{(x, 2x) | x \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^2$ は $\mathbf{R}^2$ の部分空間.

Th. 1.9
V: 有限次元ベクトル空間, $W \subseteq V$: 部分空間, $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$: W の基底に対して

$$\exists\{w_1, w_2, \ldots, w_m, v_1, v_2, \ldots, v_n\}: \ V \text{ の基底.}$$

従って $\mathrm{dim}W \leq \mathrm{dim}V$ が成立している.

問 5
Th.1.9 を示せ.

Def. 1.10
V: 実ベクトル空間とする.
$z_1, z_2, \ldots, z_n \in V$ に対して

$$W := \{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n | a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}\}$$

とおくと W は V の部分空間となり,
$z_1, z_2, \ldots, z_n$ で生成される V の部分空間と呼ばれ

$$W = \langle z_1, z_2, \ldots, z_n \rangle$$

で表される (注意 ここで $\dim W = n$ とは限らない).

Ex. 1.11
$(1,2,0), (1,0,0) \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$\langle (1,2,0), (1,0,0) \rangle = \{(x,y,0) \in \mathbf{R}^3 | x, y \in \mathbf{R}\}.$$

Def. 1.12
V, W: 実ベクトル空間とする.
$f : V \to W$ が次を満たすとき f を (V から W への) 線型写像と呼ぶ

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(ax) = af(x) \quad \text{for } x, y \in V, a \in \mathbf{R}.$$

Ex. 1.13
次は線型写像
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto 2x,\ f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}; (x,y) \mapsto x + 2y.$
次は線型写像でない
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; x \mapsto x + 1$

問 6
Ex.1.13 を示せ.

問 7
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が線型写像ならば $f(x) = rx$ の形であることを示せ.

以下 V, W を $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする

Prop 1.14
$f: V \to W$ 線型写像とする.
このとき次が成立している
(i) $\mathrm{Im} f = \{f(x) | x \in V\}$ は W の部分空間.
(ii) $\mathrm{Ker} f = \{x \in V | f(x) = 0\}$ は V の部分空間.
(iii) $\dim V = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$ (次元定理)

問 8
Prop.1.14 を示せ.

Def. 1.15
$f: V \to W$: 線型写像とする.
$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$: V の基底, $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$: W の基底 $(n, m \in \mathbf{N})$ のとき
$M(f) = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m, n, \mathbf{R})$(=成分が実数の $m \times n$ 行列全体の集合) を次で定義し,
$M(f)$ を f の (基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ に関する) 行列表示と呼ぶ.

$$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) = (w_1, w_2, \ldots, w_m) M(f).$$

i.e. $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ for $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Ex. 1.16
$f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2; (x, y, z) = (x + 2y, 3z)$ は線型写像であり,

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1), \\ f(0,1,0) &= (2,0) = 2(1,0) + 0(0,1), \\ f(0,0,1) &= (0,3) = 0(1,0) + 3(0,1) \end{aligned}$$

より

$$(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = ((1,0),(0,1)) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となるので f の基底 $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, $\{(1,0), (0,1)\}$ に関する行列表示は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

である.
★ この形の基底は標準基底と呼ばれる.

問 9
$f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3; (x, y, z, w) \mapsto (y - 3z - w, x + y + 2w, y - w + z)$ の標準基底に関する行列表示を求めよ.

問 10

V, W, U: 有限次元ベクトル空間とし, $f, g : V \to W$, $h : W \to U$ 線型写像とする.
このとき次の成立を示せ.
(i) $M(f+g) = M(f) + M(g)$.
(ii) $M(af) = aM(f)$ for $\forall a \in \mathbf{R}$.
(iii) $M(h \circ f) = M(h)M(f)$.

Rem. 1.17 $f : V \to W$: 線型写像,
$M(f)$ が f の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ に関する行列表示のとき,
$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n \in V$ に対して

$$
\begin{aligned}
f(v) &= f(b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n) \\
&= b_1f(v_1) + b_2f(v_2) + \ldots + b_nf(v_n) \\
&= (f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= (w_1, w_2, \ldots, w_m)M(f) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である.
従って $A \in M(m, n, \mathbf{R})$ に対して V から W への線型写像 f_A を
$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_nv_n \in V$ に対して

$$
f_A(v) := (w_1, w_2, \ldots, w_m)A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

で定義すると

$$
M(f_A) = A
$$

となる.
よって $\{f | f : V \to W$ は線型写像$\}$ と $M(m, n, \mathbf{R})$ は 以後同一視して考えることにする.

2 Lie algebra の定義と例

Def. 2.1

$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ が次の (i), (ii), (iii) を満たすブラケット積と呼ばれる演算

$$[\ ,\ ]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$$

をもっているとき, $\mathfrak{g}$ を ($\mathbf{R}$ 上の) Lie algebra (Lie 代数 or Lie 環) という.

(i) $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$, $\forall a\in\mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}&[x+y,z]=[x,z]+[y,z], \quad [ax,y]=a[x,y],\\ &[x,y+z]=[x,y]+[x,z], \quad [x,ay]=a[x,y].\end{aligned}$$

(i.e. ブラケット積は $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への双線型写像).

(ii) $\forall x\in\mathfrak{g}$ に対して

$$[x,x]=0.$$

(iii) (Jacobi 恒等式) $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}$ に対して

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0.$$

Rem. 2.2

(ii) の条件は次の (ii)' の条件と同値

(ii)' $[x,y]=-[y,x]$ for $\forall x,y\in\mathfrak{g}$

($\because$)(ii) $\Rightarrow$ (ii)')

(ii) より

$$0=[x+y,x+y]=[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=[x,y]+[y,x]$$

よって $[x,y]=-[y,x]$ となり o.k.

(ii)' $\Rightarrow$ (ii))

(ii)' において $x=y$ とおくと

$$[x,x]=-[x,x].$$

よって

$$2[x,x]=0.$$

$\mathfrak{g}$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間より $[x,x]=0$ となり o.k. [1]

[1] もし標数が 2 の体で考えていればこうはいかない

Ex. 2.3
$n \in \mathbf{N}$, $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$: 成分が $\mathbf{R}$ の $n \times n$ 行列全体の集合とする.
$\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ は行列の和とスカラー倍により $\mathbf{R}$ 上の (有限次元) ベクトル空間である.
$\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ にブラケット積を次で定義する.

$$[X, Y] := XY - YX \quad (X, Y \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R}))$$

このとき $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ は Lie algebra となる (Jacobi 恒等式を各自チェックせよ).
以下, この Lie algebra を $\mathfrak{g}l(n, \mathbf{R})$ で表す.

写像の言葉を使うと次のようになる.

Ex. 2.4
V: $\mathbf{R}$ 上の n 次元ベクトル空間とし,

$$\mathrm{End}(V) := \{X : V \to V \text{ 線型写像 }\} (\simeq \mathrm{M}(n, \mathbf{R}))$$

とする.
$\mathrm{End}(V)$ に和, スカラー倍, ブラケット積を

$$\begin{aligned}
&(X + Y)(v) := X(v) + Y(v), \\
&(\alpha X)(v) := \alpha(X(v)), \\
&[X, Y](v) := X(Y(v)) - Y(X(v))
\end{aligned}$$

で定義したものは Lie algebra となっている.
以下, この Lie algebra を $\mathfrak{g}l(V)$ で表す.

問 11
$i, j \in [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $E_{ij} \in \mathfrak{g}l(n, \mathbf{R})$ を (i, j) 成分のみ 1 で他は 0 の行列とする.

(i) $\{E_{ij}\}_{i,j \in [n]}$ は $\mathfrak{g}l(n, \mathbf{R})$ の基底となることを示せ.
(ii) $\mathfrak{g}l(n, \mathbf{R})$ は何次元ベクトル空間か？
(iii) $[E_{ij}, E_{kl}]$ $(i, j, k, l \in [n])$ を E_{ij} たちの１次結合で表せ.

★ Lie algebra の構造はブラケット積の双線型性より, 基底間のブラケット積により決定される.

Ex. 2.5
V: $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする.
$[x, y] = 0$ for $\forall x, y \in V$ とすると V は Lie algebra になる
(ベクトル空間 V から生成される trivial Lie algebra と呼ばれる).

以下, $\mathfrak{g}$ は ($\mathbf{R}$ 上の) Lie algebra を表すものとする.

Def. 2.6

$$[x, y] = 0 \quad \text{for } \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

のとき, $\mathfrak{g}$ を可換 Lie algebra と呼ぶ.

Ex. 2.7

低次元 Lie algebra の構造を調べてみよう.

(i) $V = \mathbf{R}v$: 1次元 Lie algebra とし, $\{v\}$ を V の基底とする.
このとき, Lie algebra の条件 (ii) より $[v, v] = 0$ であるので

$$[x, y] = 0 \text{ for } \forall x, y \in V.$$

よって V は可換 Lie algebra.

(ii) $V = \mathbf{R}u + \mathbf{R}v$ ($\{u, v\}$:基底): 2次元 Lie algebra とする.
条件 (ii) を満たすことより, 考えられる基底間のブラケット積の構造は次のもの

$$[u, u] = [v, v] = 0, [v, u] = -[u, v], [u, v] = au + bv \quad (a, b \in \mathbf{R})$$

逆に, 任意の $a, b \in \mathbf{R}$ に対してブラケット積の構造を上で定義した R 上の2次元ベクトル空間は, 常に条件 (iii) を満たし, Lie algebra になっていることが容易に確かめられる.

演習 1

3次元 Lie algebra に対して例 2.7 と同様のことを考察せよ.

Ex. 2.8

$$L(\mathbf{R}[t]) := \{a(t)\frac{d}{dt} | a(t) \in \mathbf{R}[t]\}$$

($a(t)\frac{d}{dt}f(t) = a(t)f'(t)$ for $f(t) \in \mathbf{R}(t)$) とおき, 和, スカラー倍, ブラケット積を次で定義する.

$$\begin{aligned}
a(t)\tfrac{d}{dt} + b(t)\tfrac{d}{dt} : \;& = (a(t) + b(t))\tfrac{d}{dt}, \\
\alpha(a(t)\tfrac{d}{dt}) : \;& = (\alpha a(t))\tfrac{d}{dt}, \\
[a(t)\tfrac{d}{dt}, b(t)\tfrac{d}{dt}] : \;& = (a(t)\tfrac{d}{dt})(b(t)\tfrac{d}{dt}) - (b(t)\tfrac{d}{dt})(a(t)\tfrac{d}{dt}) \\
(\;& = (a(t)b'(t) - b(t)a'(t))\tfrac{d}{dt}))
\end{aligned}$$

とおくと $L(\mathbf{R}[t])$ は Lie algebra になる. 尚, ブラケット積の定義における最後の等式は次より成立している.

$$
\begin{aligned}
&((a(t)\tfrac{d}{dt})(b(t)\tfrac{d}{dt}) - (b(t)\tfrac{d}{dt})(a(t)\tfrac{d}{dt}))f(t)\\
&= (a(t)\tfrac{d}{dt})((b(t)\tfrac{d}{dt})f(t)) - (b(t)\tfrac{d}{dt})((a(t)\tfrac{d}{dt}))f(t))\\
&= (a(t)\tfrac{d}{dt})((b(t)f'(t)) - (b(t)\tfrac{d}{dt})((a(t)f'(t))\\
&= (a(t)(\tfrac{d}{dt})(b(t)f'(t)) - b(t)(\tfrac{d}{dt}(a(t)f'(t))\\
&= (a(t)(b'(t)f'(t) + b(t)f''(t)) - b(t)(a'(t)f'(t) + a(t)f''(t))\\
&= a(t)b'(t)f'(t) + a(t)b(t)f''(t) - b(t)a'(t)f'(t) - b(t)a(t)f''(t)\\
&= a(t)b'(t)f'(t) - b(t)a'(t)f'(t)\\
&= (a(t)b'(t) - b(t)a'(t))f'(t)\\
&= (a(t)b'(t) - b(t)a'(t))\tfrac{d}{dt}f(t)
\end{aligned}
$$

Ex. 2.9

A: $\mathbf{R}$ 上の algebra[2] に対して

$$\mathrm{Der}(A) := \{D : A \to A \text{ 線型写像 } | D(xy) = D(x)y + xD(y) \text{ for } \forall x, y \in A\}$$

とおき, 和, スカラー倍, ブラケット積を次で定義する.

$$
\begin{aligned}
&(D_1 + D_2)(a) := D_1(a) + D_2(a),\\
&(\alpha D)(a) := \alpha(D(a)),\\
&[D_1, D_2] := D_1D_2 - D_2D_1.
\end{aligned}
$$

well defined (それぞれが $\mathrm{Der}(A)$ の元になっていること) は和とスカラー倍に関しては容易 (各自チェックせよ) であるのでブラケット積のみチェックしよう.

$$
\begin{aligned}
&[D_1, D_2](xy) - [D_1, D_2](x)y - x[D_1, D_2](y)\\
&= (D_1D_2 - D_2D_1)(xy) - (D_1D_2 - D_2D_1)(x)y - x(D_1D_2 - D_2D_1)(y)\\
&= D_1(D_2(xy)) - D_2(D_1(xy)) - (D_1D_2(x) - D_2D_1(x))y\\
&\quad -x(D_1D_2(y) - D_2D_1(y))\\
&= D_1(D_2(x)y + xD_2(y)) - D_2(D_1(x)y + xD_1(y))\\
&\quad -(D_1(D_2(x)))y + (D_2(D_1(x)))y - x(D_1(D_2(y))) + x(D_2(D_1(y)))\\
&= D_1(D_2(x)y) + D_1(xD_2(y)) - D_2(D_1(x)y) - D_2(xD_1(y))\\
&\quad -(D_1(D_2(x)))y + (D_2(D_1(x)))y - x(D_1(D_2(y))) + x(D_2(D_1(y)))\\
&= (D_1(D_2(x)))yD_2(x)D_1(y) + D_1(x)D_2(y) + x(D_1(D_2(y)))\\
&\quad -(D_2(D_1(x)))y - D_1(x)D_2(y) - D_2(x)D_1(y) - x(D_2(D_1(y)))\\
&\quad -(D_1(D_2(x)))y + (D_2(D_1(x)))y - x(D_1(D_2(y))) + x(D_2(D_1(y)))\\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって well defind は o.k.
この和, スカラー倍, ブラケット積により $\mathrm{Der}(A)$ は Lie algebra となる.

[2] i.e. A は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間で $(x+y)z = xz+yz, x(y+z) = xy+xz, (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$ を満たす積が定義されているもの (行列, $\mathbf{R}[t]$ 等)

Prop 2.10
$L(\mathbf{R}[t]) = \mathrm{Der}(\mathbf{R}[t])$ である.

問 12
Prop. 2.10 を示せ.

3　部分 Lie algebra とイデアル

以下, $\mathfrak{g}$ を $\mathbf{R}$ 上の Lie algebra とする.

Def. 3.1

$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の部分 Lie algebra (Lie subalgebra)
$\Leftrightarrow$ (i) $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の部分空間 (i.e. $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ で $\mathfrak{h}$ もベクトル空間),
(ii)$[x, y] \in \mathfrak{h}$ for $\forall x, y \in \mathfrak{h}$.

Ex. 3.2

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) | \mathrm{tr} X = 0\}$$

とおく ($\mathrm{tr}X = \sum_{k=1}^{n} x_{kk}$ for $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$).
一般に $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して次が成立している (チェックせよ) ので $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ は $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ の部分 Lie algebra となる.

$$\mathrm{tr}(\alpha X) = \alpha \mathrm{tr} X, \quad \mathrm{tr}(X + Y) = \mathrm{tr}X + \mathrm{tr}Y, \quad \mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX).$$

Def. 3.3

$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ 何次元 Lie algebra か？

Ex. 3.4

例 2.9 において, $A = \mathfrak{g}$ とすると

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) := \{D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \text{ 線型写像 } | D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]\}$$

となり, $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の部分 Lie algebra である.
$\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ の元は $\mathfrak{g}$ の微分 (derivation) と呼ばれる.

Def. 3.5

$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ のイデアル (ideal)
$\Leftrightarrow$ (i) $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の部分空間,
(ii)$[x, h] \in \mathfrak{h}$ for $\forall x \in \mathfrak{g}$, $\forall h \in \mathfrak{h}$.

★ イデアル ⇒ 部分 Lie algebra.

Ex. 3.6

(i) $\{0\}$, $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである (この 2 つのイデアルは $\mathfrak{g}$ の自明なイデアル (trivial ideal) と呼ばれる[3]).

[3] 3 次元以上の Lie algebra で自明なイデアルしかもたないものは simple Lie algebra と呼ばれる. simple Lie algebra の直和になる Lie algebra は semi-simple Lie algebra と呼ばれる

(ii) $\mathfrak{s}l(n,\mathbf{R})$ は $\mathfrak{g}l(n,\mathbf{R})$ のイデアルである.

Lem. 3.7

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$: $\mathfrak{g}$ の部分空間に対して

$$[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] := \{x \in \mathfrak{g} | \exists a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathfrak{a}, \exists b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathfrak{b} \text{ s.t. } x = \sum_{i=1}^{m} [a_i, b_i]\}$$

とおく.

(i) $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ は $\mathfrak{g}$ の部分空間である.
(ii) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである.

($\because$) (i) 定義より容易.
(ii) $x \in \mathfrak{g}$, $y = \sum_{i=1}^{m}[a_i, b_i] \in [\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ に対して $[x,y] \in [\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ となることを示す.

$$\begin{aligned}
[x,y] &= [x, \textstyle\sum_{i=1}^{m}[a_i,b_i]] \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m}[x,[a_i,b_i]] \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m}(-[a_i,[b_i,x]] - [b_i,[x,a_i]]) \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{m}([a_i,[x,b_i]] + [[x,a_i],b_i])
\end{aligned}$$

ここで, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルより, 各 $i \in [m]$ に対して

$$[x,b_i](=: b_i') \in \mathfrak{b}, [x,a_i](=: a_i') \in \mathfrak{a}$$

であるので

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{m}([a_i,b_i'] + [a_i',b_i]) \in [\mathfrak{a},\mathfrak{b}].$$

故に $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである. q.e.d

Def. 3.8

$D(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ とおき, $D(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の導イデアル (derived ideal) と呼ぶ.
特に,

$$D^1(\mathfrak{g}) := D(\mathfrak{g}), D^n(\mathfrak{g}) := D(D^{n-1}(\mathfrak{g})) \text{ if } n \in \{2,3,4,\cdots\}$$

とおくと

$$\mathfrak{g} \supseteq D(\mathfrak{g})(= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) \supseteq D^2(g)(= [D(\mathfrak{g}), D(\mathfrak{g})]) \supseteq D^3(\mathfrak{g}) \supseteq \cdots$$

となり, $D^n(\mathfrak{g})$ $(n \in \mathbf{N})$ は Lem. 3.7 より $\mathfrak{g}$ のイデアルである.

Lem. 3.9

(i) $D(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$,
(ii) $D(\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$.

略証:

$n = 1$ のときには $sl(n, \mathbf{R}) = \{0\}$, $D(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})) = \{0\}$ より (i), (ii) は成立しているので $n \geq 2$ のときで証明すると良い.
(i) $D(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})) \subseteq \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ は定義と tr の性質より容易.
$D(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})) \supseteq \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ は

$$\{E_{ij} | i, j \in [n], i \neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{nn} | i \in [n-1]\}$$

が $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ の基底で (各自チェックせよ),

$$E_{ij} = [E_{ik}, E_{kj}] \quad \text{for } i \neq j, E_{ii} - E_{nn} = [E_{in}, E_{ni}] \quad \text{for } i \in [n-1]$$

となることより成立する.
(ii) 次の等式より成立する.

$$\begin{aligned} &E_{ij} = \tfrac{1}{2}[E_{ii} - E_{jj}, E_{ij}] \quad \text{for } i \neq j, \\ &E_{ii} - E_{nn} = [E_{in}, E_{ni}] \quad \text{for } i \in [n-1]. \qquad \underline{q.e.d} \end{aligned}$$

4　準同型と 剰余 Lie algebra

この章では $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ を ($\mathbf{R}$ 上の) Lie algebra とする.

Def. 4.1

$f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ (Lie algebra としての) 準同型写像
$\Leftrightarrow$ (i) f:線型写像,
(ii) $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ for $\forall x, y \in \mathfrak{g}$.
全単射な準同型写像は同型写像と呼ばれる.
$\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ への同型写像が存在するとき $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ は (Lie algebra として) 同型であると言い,

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'$$

で表される.
$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への同型写像は $\mathfrak{g}$ の (or $\mathfrak{g}$ 上の) 自己同型写像と呼ばれる.

問 13

次を示せ.
(i) 準同型写像の合成写像は準同型写像である.
(ii) 同型写像の逆写像も同型写像である.

Lem. 4.2

可換でない 2 次元 Lie algebra は全て同型である.

($\because$) $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$: 可換でない 2 次元 Lie algebra とし, x, y を $\mathfrak{g}$ の基底, x', y' を $\mathfrak{g}'$ の基底で

$$[x, y] = ax + by \quad (a, b \in \mathbf{R}, (a, b) \neq (0, 0)), \quad [x', y'] = y'$$

とする.
Case 1. $b \neq 0$ のとき

$$[\frac{1}{b}x, \frac{a}{b}x + y] = \frac{a}{b}x + y$$

となる.
従って $\varphi : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ を

$$\varphi(x') = \frac{1}{b}x, \quad \varphi(y') = \frac{a}{b}x + y$$

を満たす線形写像として定義すると, φ は同型写像となるので

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'.$$

Case 2. $b = 0$ のとき

$$[-\frac{1}{a}y, x] = x$$

となる.
従って $\varphi : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ を

$$\varphi'(x') = -\frac{1}{a}x, \quad \varphi'(y') = x$$

を満たす線形写像として定義すると, φ は同型写像となるので

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'.$$

よって, 全ての可換でない 2 次元 Lie algebra は $\mathfrak{g}'$ と同型ということが示せた. 故に Lemma は成立する. $\underline{q.e.d}$

Def. 4.3

$f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ 準同型写像に対して

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}f := \{x \in \mathfrak{g} | f(x) = 0\} \quad (f \text{ の核 (kernel)}) \\ &\mathrm{Im}f := \{f(x) | x \in \mathfrak{g}\} \quad (f \text{ の像 (image)}) \end{aligned}$$

とおく.

Lem. 4.4

$f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ 準同型写像とする.
(i) $\mathrm{Ker}f$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである.
(ii) $\mathrm{Im}f$ は $\mathfrak{g}'$ の部分 Lie algebra である.

($\because$) (i) $x \in \mathfrak{g}$, $h \in \mathrm{Ker}f$ に対して

$$f([x, h]) = [f(x), f(h)] = [f(x), 0] = 0$$

であるので $[x, h] \in \mathrm{Ker}f$.
$\mathrm{Ker}f$ が $\mathfrak{g}$ の部分空間になることは f が線型写像より o.k.
従って $\mathrm{Ker}f$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである.
(ii) 定義より容易. $\underline{\text{q.e.d}}$

問 14

Lem. 4.4-(ii) を示せ.

Def. 4.5

$x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を

$$\mathrm{ad}(x)(y) := [x, y]$$

で定義する.

問 15

$x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ を示せ.

Lem. 4.6

ad : $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(\mathfrak{g}); x \mapsto \mathrm{ad}(x)$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ への Lie algebra としての準同型写像である[4].

($\because$) $x, y, z \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}(x+y)(z) &= [x+y, z] \\
&= [x, z] + [y, z] \\
&= \mathrm{ad}(x)(z) + \mathrm{ad}(y)(z) \\
&= (\mathrm{ad}(x) + \mathrm{ad}(y))(z) \\
\mathrm{ad}(\alpha x)(z) &= [\alpha x, z] \\
&= \alpha[x, z] \\
&= \alpha(\mathrm{ad}(x)(z)) \\
&= (\alpha \mathrm{ad}(x))(z)
\end{aligned}$$

となるので ad は線型写像である. さらに,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}([x, y])(z) - [\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)](z) \\
&= [[x, y], z] - (\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x))(z) \\
&= [[x, y], z] - \mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y)(z) + \mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x)(z) \\
&= [[x, y], z] - [x, [y, z]] + [y, [x, z]] \\
&= -[z, [x, y]] - [x, [y, z]] - [y, [z, x]] \\
&= 0 \quad (\because \text{ Jacobi 恒等式})
\end{aligned}$$

となるので ad は準同型写像である. <u>*q.e.d*</u>

Def. 4.7

V: $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする.
π: (V における) $\mathfrak{g}$ の表現
$\Leftrightarrow$
$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V)$ (Lie algebra としての) 準同型写像
V は π の表現空間と呼ばれる ((π, V) を $\mathfrak{g}$ の表現と呼ぶこともある).
Lem.4.6 より ad は $\mathfrak{g}$ を表現空間とする $\mathfrak{g}$ の表現であり, 随伴表現 (adjoint representation) と呼ばれる.

Prop 4.8

Im(ad) は Der($\mathfrak{g}$) のイデアルである.

($\because$) Im(ad)($= \{\mathrm{ad}(x) | x \in \mathfrak{g}\}$) が Der($\mathfrak{g}$) の部分空間になっていることは問 15 と Lem. 4.4-(ii) より o.k.

[4] $\mathfrak{g}$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間より $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ も $\mathbf{R}$ 上の Lie algebra である

従って, $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad})$, $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ に対して $[D, \mathrm{ad}(x)] \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad})$ を示すとよい.
まず $[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(D(x))$ となることを示そう.
$y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
[D, \mathrm{ad}(x)](y) &= (D\mathrm{ad}(x) - \mathrm{ad}(x)D)(y) \\
&= D(\mathrm{ad}(x)(y)) - \mathrm{ad}(x)(D(y)) \\
&= D([x, y]) - [x, D(y)] \\
&= [D(x), y] + [x, D(y)] - [x, D(y)] \\
&= [D(x), y] \\
&= \mathrm{ad}(D(x))(y)
\end{aligned}$$

よって $[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(D(x))$ である.
従って, Lem. 15 より

$$[D, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(D(x)) \in \mathrm{Im}(\mathrm{ad}) \quad \text{for } \forall D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}), \forall x \in \mathfrak{g}$$

となるので $\mathrm{Im}(\mathrm{ad})$ は $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ のイデアルである.　$\underline{q.e.d}$

Def.-Prop. 4.9

$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ のイデアルとする.
$x, y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathfrak{h}$$

とおくと $\sim$ は $\mathfrak{g}$ の同値関係であり, この同値関係による $\mathfrak{g}$ の同値類の集合を $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ で表す. 言い換えると

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \{x + \mathfrak{h} (=: \bar{x}) | x \in \mathfrak{g}\}$$

$(x + \mathfrak{h} := \{x + h | h \in \mathfrak{h}\}$: x を含む同値類) である.
$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ に和, スカラー倍, ブラケット積を次で定義する.
$\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}, \quad \alpha\bar{x} = \overline{\alpha x}, \quad [\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]}$$

このとき $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ は ($\mathbf{R}$ 上の) Lie algebra となり, ($\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ による) 剰余 Lie algebra と呼ばれる.

問 16

Def.-Prop. 4.9 で定義した 和, スカラー倍, ブラケット積の well defined 及び $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ が Lie algebra となることを示せ.

Th. 4.10

$f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ 準同型写像に対して

$$\mathfrak{g}/\mathrm{Ker} f \simeq \mathrm{Im} f.$$

$(\because)$ $\varphi : \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}f$ を

$$\varphi(\bar{x}) := f(x)$$

で定義すると φ は同型写像となる.
このことを well defined から順に示していく.
(well defined)

$$\begin{aligned}
\bar{x} = \bar{y} \quad &\Rightarrow x - y \in \mathrm{Ker}f \\
&\Rightarrow f(x-y) = 0 \\
&\Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \quad (\because \ f\text{: 線型写像}) \\
&\Rightarrow f(x) = f(y) \\
&\Rightarrow \varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{y})
\end{aligned}$$

よって φ は well defined.
(単射)

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{y}) \quad &\Rightarrow f(x) = f(y) \\
&\Rightarrow f(x) - f(y) = 0 \\
&\Rightarrow f(x-y) = 0 \\
&\Rightarrow x - y \in \mathrm{Ker}f \\
&\Rightarrow \bar{x} = \bar{y}
\end{aligned}$$

よって φ は単射.
(全射)
$f(x) \in \mathrm{Im}f (= \{f(x) | x \in \mathfrak{g}\})$ に対して $\varphi(\bar{x}) = f(x)$ であるので φ は全射.
(準同型)
$\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}f$, $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y}), \\
&\varphi(\alpha\bar{x}) = \varphi(\overline{\alpha x}) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\varphi(\bar{x}), \\
&\varphi([\bar{x}, \bar{y}]) = \varphi(\overline{[x,y]}) = f([x,y]) = [f(x), f(y)] = [\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y})]
\end{aligned}$$

よって φ は準同型写像である.
以上により φ は $\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}f$ から $\mathrm{Im}f$ への Lie algebra としての同型写像であることが示されたので

$$\mathfrak{g}/\mathrm{Ker}f \simeq \mathrm{Im}f$$

が成立する. $\underline{q.e.d}$

Cor. 4.11

$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の部分 Lie algebra, $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{g}$ のイデアルのとき

$$\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) \simeq (\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}.$$

略証:
$f : \mathfrak{h} \to (\mathfrak{h}+\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ を

$$f(h) := \bar{h}(= h + \mathfrak{a})$$

で定義すると f は全射準同型[5]で, $\mathrm{Ker} f = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ となるので定理 4.10 より成立する. $\underline{q.e.d}$

問 17

系 4.11 を厳密に証明せよ ($\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ の部分 Lie algebra で, $\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ のイデアルであることも示すこと).

[5]一般にこの種の写像は全射準同型写像で標準的準同型写像と呼ばれる

5 可解 Lie algebra

この章でも $\mathfrak{g}$ を ($\mathbf{R}$ 上の) Lie algebra とする.

Def. 5.1

$\exists n \in \mathbf{N}$ s.t. $D^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ となるとき $\mathfrak{g}$ を可解 Lie algebra (solvable Lie algebra) と呼ぶ.
$(D^1(\mathfrak{g}) := D(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $D^n(\mathfrak{g}) := D(D^{n-1}(\mathfrak{g}))$ for $n \geq 2)$.

Lem. 5.2

可換 Lie algebra は可解 Lie algebra である.

$(\because)$ $\mathfrak{g}$: 可換 Lie algebra ならば $D(\mathfrak{g}) = \{0\}$ となるから可解である. <u>*q.e.d*</u>

Lem. 5.3

剰余 Lie algebra $\mathfrak{g}/D(\mathfrak{g})$ は可解 Lie algebra である.

$(\because)$ $\bar{x}(= x + D(\mathfrak{g})), \bar{y}(y + D(\mathfrak{g})) \in \mathfrak{g}/D(\mathfrak{g})$ に対して

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]} = [x, y] + D(\mathfrak{g}) = D(\mathfrak{g}) = \bar{0}$$

となるので $\mathfrak{g}/D(\mathfrak{g})$ は可換 Lie algebra.
従って Lem. 5.2 より, $\mathfrak{g}/D(\mathfrak{g})$ は可解 Lie algebra である. <u>*q.e.d*</u>

Rem. 5.4

$\mathfrak{g}$: Lie algebra, $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ のイデアルとする. このとき

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}: \text{ 可換 Lie algebra} \Leftrightarrow D(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{h}.$$

演習 2

$$\mathfrak{a} := \{A = (a_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ if } i > j\} \quad (\text{上半三角行列全体の集合})$$

とおくと $\mathfrak{a}$ は可解である.

Ex. 5.5

Lem. 3.9 より $D(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$, $D(\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ であるので

$$D^p(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) \text{ for } p \geq 1, \quad D^q(\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) \text{ for } q \geq 1.$$

よって $n \geq 2$ のとき $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ は可解でない[6].

[6] $n = 1$ のときは $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}) = \{0\}$ よりどちらも可解である

Th. 5.6

$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の部分 Lie algebra とする.
(i) $\mathfrak{g}$ が可解 Lie algebra ならば $\mathfrak{h}$ も可解 Lie algebra である.
(ii) $\mathfrak{g}$ が可解 Lie algebra で $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ も可解 Lie algebra である.

($\because$) (i) $\mathfrak{g}$ が可解より

$$\exists r \in \mathbf{N} \text{ s.t. } D^r(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ より

$$D(\mathfrak{h}) \subseteq D(\mathfrak{g}), D^2(\mathfrak{h}) \subseteq D^2(\mathfrak{g}), \cdots$$

よって

$$D^r(\mathfrak{h}) \subseteq D^r(\mathfrak{g}) = \{0\}$$

となるので

$$D^r(\mathfrak{h}) = \{0\}.$$

従って $\mathfrak{h}$ は可解である.
(ii) まず $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}; x \mapsto \bar{x}(= x + \mathfrak{h})$ (標準的準同型写像) としたとき $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\pi(D^n(\mathfrak{g})) = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})) \tag{1}$$

であることを帰納法で示す.
$n = 1$ のとき.
$\pi(D(\mathfrak{g})) = D(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ を示そう.

$$\begin{aligned} z \in \pi(D(\mathfrak{g})) \quad &\Rightarrow \exists x \in D(\mathfrak{g}) \text{ s.t. } \pi(x) = z \\ &\Rightarrow \exists x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_m \in \mathfrak{g} \text{ s.t. } x = \textstyle\sum_{i=1}^m [x_i, y_i] \\ &\Rightarrow \pi(x) = \pi(\textstyle\sum_{i=1}^m [x_i, y_i]) \\ &\Rightarrow z = \textstyle\sum_{i=1}^m [\pi(x_i), \pi(y_i)] \quad (\because \ \pi\text{: 準同型}) \\ &\Rightarrow z = \textstyle\sum_{i=1}^m [\bar{x_i}, \bar{y_i}] \\ &\Rightarrow z \in D(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \end{aligned}$$

逆に

$$\begin{aligned} w \in D(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \quad &\Rightarrow \exists \bar{x_1}, \bar{x_2}, \cdots, \bar{x_m}, \bar{y_1}, \bar{y_2}, \cdots, \bar{y_m} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \text{ s.t. } w = \textstyle\sum_{i=1}^m [\bar{x_i}, \bar{y_i}] \\ &\Rightarrow w = \overline{\textstyle\sum_{i=1}^m [x_i, y_i]} \\ &\Rightarrow w = \pi(\textstyle\sum_{i=1}^m [x_i, y_i]) \\ &\Rightarrow w \in \pi(D(\mathfrak{g})) \end{aligned}$$

よって

$$\pi(D(\mathfrak{g})) = D(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))$$

が成立する.
$n-1$ まで成立していると仮定し n のときを示す.

$$\begin{aligned}D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) &= D(D^{n-1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))\\ &= D(\pi(D^{n-1}(\mathfrak{g}))) \quad (\because\ \text{帰納法の仮定})\\ &= [\pi(D^{n-1}(\mathfrak{g})), \pi(D^{n-1}(\mathfrak{g}))]\\ &= \pi([D^{n-1}(\mathfrak{g}), D^{n-1}(\mathfrak{g})]) \quad (\because\ \pi\text{: 準同型}^{7})\\ &= \pi(D(D^{n-1}(\mathfrak{g})))\\ &= \pi(D^n(\mathfrak{g}))\end{aligned}$$

よって帰納法により (1) が証明された.
ここで $\mathfrak{g}$ が可解であることより

$$\exists m \in \mathbf{N} \text{ s.t. } D^m(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

よって

$$D^m(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \pi(D^m(\mathfrak{g})) = \pi(\{0\}) = \{\bar{0}\}.$$

故に $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ は可解である. <u>*q.e.d*</u>

Th. 5.7

$\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ のイデアルとする. このとき次の (i), (ii) は同値.
(i) $\mathfrak{h}$: 可解 Lie algebra かつ $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$: 可解 Lie algebra.
(ii) $\mathfrak{g}$: 可解 Lie algebra

($\because$) (ii) $\Rightarrow$ (i) は Th.5.6 より自明であるので (i) $\Rightarrow$ (ii) のみ示す.
仮定より

$$\exists m, n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } D^m(\mathfrak{h}) = \{0\}, D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \{\bar{0}\}.$$

よって $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を標準的準同型写像とすると (1) より

$$\pi(D^n(\mathfrak{g})) = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \{\bar{0}\}.$$

従って

$$D^n(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{h}.$$

故に

$$D^{m+n}(\mathfrak{g}) = D^m(D^n(\mathfrak{g})) \subseteq D^m(\mathfrak{h}) = \{0\}$$

となるので $\mathfrak{g}$ は可解である.
以上により (i) と (ii) の同値性が証明された. <u>*q.e.d*</u>

Ex. 5.8

$\mathfrak{g}l(3, \mathbf{R})$ の部分 Lie algebra $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} : &= \{ \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ a, b, c \in \mathbf{R} \}, \\ \mathfrak{h} : &= \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ b, c \in \mathbf{R} \}. \end{aligned}$$

このとき

$$\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}, \quad D(\mathfrak{h}) = \{0\}, \quad \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq \mathbf{R}$$

となることが容易にわかる.
よって

$$\mathfrak{h}\text{: 可解 Lie algebra.}$$

また, 一次元 Lie algebra は可解 Lie algebra であるので

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}\text{: 可解 Lie algebra}^{8}.$$

従って, Th.5.7 より

$$\mathfrak{g}\text{: 可解 Lie algebra.}$$

[8] $D(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$ を示して, Lem. 5.3 より $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}/D(\mathfrak{g})$: 可解 Lie algebra といってもよい

6　べき零 Lie algebra

この章でも $\mathfrak{g}$ を ($\mathbf{R}$ 上の) Lie algebra とする.

Def. 6.1

$C^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}$ とおき, $k \in \mathbf{N}$ に対して

$$C^k(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, C^{k-1}(\mathfrak{g})]$$

で定義する.

$$C^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \supseteq C^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supseteq C^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \supseteq \cdots$$

$\exists n \in \mathbf{N}$ s.t. $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ となるとき $\mathfrak{g}$ をべき零 Lie algebra (nilpotent Lie algebra) と呼ぶ.

Rem. 6.2

(i)

$$\begin{aligned}
&D^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} = C^0(\mathfrak{g}) \\
&D^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = C^1(\mathfrak{g}) \\
&D^2(\mathfrak{g}) = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \subseteq [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = C^2(\mathfrak{g}) \\
&\qquad\vdots \\
&D^k(\mathfrak{g}) \subseteq C^k(\mathfrak{g}) \\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

従って特に

$$\text{可換 Lie algebra} \Rightarrow \text{べき零 Lie algebra} \Rightarrow \text{可解 Lie algebra.}$$

(ii) Lem.3.7-(ii) より $C^k(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである.

Ex. 6.3

非可換な 2 次元 Lie algebra は可解であるがべき零でない.

略証:

$\mathfrak{g}$: $\{e_1, e_2\}$ を基底として持つ非可換な 2 次元 Lie algebra とし,

$$[e_1, e_2] = ae_1 + be_2 =: f$$

とする (非可換より $f \neq 0$).
このとき

$$\begin{aligned}
&C^1(\mathfrak{g}) = D^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbf{R}f, \\
&D^2(\mathfrak{g}) = D^1(\mathbf{R}f) = \{0\}, \\
&C^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^1(\mathfrak{g})] = [\mathfrak{g}, \mathbf{R}f] = \mathbf{R}f, \\
&C^k(\mathfrak{g}) = \mathbf{R}f \quad \text{for } \forall k \geq 2
\end{aligned}$$

となることが容易にわかる[9] ので $\mathfrak{g}$ は可解であるが, べき零でない. <u>$q.e.d$</u>

問 18

Ex. 6.3 を厳密に証明せよ.

問 19

$$\mathfrak{a} := \{\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}l(3, \mathbf{R}) | x, y, z \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathfrak{b} := \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}l(3, \mathbf{R}) | a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}\}$$

とおく. 次を示せ.

(i) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{g}l(3, \mathbf{R})$ の部分 Lie algebra である.
(ii) $\mathfrak{a}$ はべき零であるが可換ではない.
(iii) $\mathfrak{b}$ はべき零ではない.

Th. 6.4

$\mathfrak{g}$: べき零 Lie algebra, $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ の部分 Lie algebra とする.
このとき次が成立する.

(i) $\mathfrak{h}$: べき零.
(ii) $\mathfrak{h}$: $\mathfrak{g}$ のイデアル $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$: べき零.

($\because$) (i) $\mathfrak{g}$: べき零より

$$\exists r \in \mathbf{N} \text{ s.t. } C^r(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ より

$$C^m(\mathfrak{h}) \subseteq C^m(\mathfrak{g}) \text{ for } \forall m \in \mathbf{N}.$$

特に

$$C^r(\mathfrak{h}) \subseteq C^r(\mathfrak{g}) = \{0\}$$

であるので

$$C^r(\mathfrak{h}) = \{0\}.$$

よって $\mathfrak{h}$ はべき零である.
(ii) まず, $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ を標準的準同型写像とすると $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\pi(C^n(\mathfrak{g})) = C^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \tag{2}$$

[9]Hint: $[xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2] = xy'[e_1, e_2] + yx'[e_2, e_1] = (xy' - x'y)[e_1, e_2] = (xy' - x'y)f$, $[xe_1 + ye_2, zf] = [xe_1 + ye_2, zae_1 + zbe_2] = (xzb - yza)f$, a or $b \neq 0$.

となることが (1) (i.e. $\pi(D^n(\mathfrak{g})) = D^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$) と同様に示される.
$\mathfrak{g}$ がべき零であることより

$$\exists m \in \mathbf{N} \text{ s.t. } C^m(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

よって

$$C^m(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = \pi(C^m(\mathfrak{g})) = \pi(\{0\}) = \{\bar{0}\}.$$

故に $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ はべき零である. *q.e.d*

問 20

(2) を示せ.

問 21

$k, n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\mathfrak{g}_k(n, \mathbf{R}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}l(n, \mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ if } j - i \leq k - 1\}$$

とおく. 次を示せ[10].

(i) $a, b \in \mathbf{N}$ に対して $[\mathfrak{g}_a(n, \mathbf{R}), \mathfrak{g}_b(n, \mathbf{R})] \subseteq \mathfrak{g}_{a+b}(n, \mathbf{R})$.
(ii) $\mathfrak{g}_k(n, \mathbf{R})$ はべき零 Lie algebra である.

Rem. 6.5

$\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$: べき零でも $\mathfrak{g}$ がべき零とは限らない.
例えば $\mathfrak{g}$: 非可換 2 次元 Lie algebra, $\{x, y\}$: $\mathfrak{g}$ の基底, $[x, y] = y$ とする.
$\mathfrak{h} := \mathbf{R}y$ とおくと, $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアル (1 次元 Lie algebra) で, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ も 1 次元 Lie algebra となる. 従って $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ はべき零 Lie algebra であるが $\mathfrak{g}$ はべき零 Lie algebra ではない[11].

Def. 6.6

$\mathfrak{g}$: Lie algebra に対して

$$\{x \in \mathfrak{g} | [x, y] = 0 \text{ for } \forall y \in \mathfrak{g}\}$$

を $\mathfrak{g}$ の中心 (center) と呼ぶ.

以下特に断らない限り $\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{g}$ の中心とする.

問 22

$\mathfrak{z}$ は可換 Lie algebra で, $\mathfrak{g}$ のイデアルである.

---

[10] 実は (i) の等号も成立する
[11] $C^k(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h}$ for $k \geq 1$ に注意

問 23

$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ の中心は何か？

Th. 6.7

(i) $\mathfrak{g}$: $\{0\}$ でないべき零 Lie algebra $\Rightarrow \mathfrak{z} \neq \{0\}$.
(ii) $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$: べき零 $\Rightarrow \mathfrak{g}$: べき零.

($\because$) (i) $\mathfrak{g}$: べき零で $\neq 0$ より

$$\exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } C^{n-1}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}, \quad C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

($C^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ であることに注意).
よって $C^n(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^{n-1}(\mathfrak{g})]$ より

$$\{0\} \neq C^{n-1}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}.$$

即ち $\mathfrak{z} \neq \{0\}$ である.
(ii) $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ を標準的準同型写像とすると (2) より

$$\pi(C^n(\mathfrak{g})) = C^n(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}) \text{ for } \forall n \in \mathbf{N} \tag{3}$$

仮定より

$$\exists r \in \mathbf{N} \text{ s.t. } C^r(\mathfrak{g}/\mathfrak{z}) = \{\bar{0}\}.$$

よって (3) より $\pi(C^r(\mathfrak{g})) = \{\bar{0}\}$ となるので

$$C^r(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{z}.$$

従って

$$C^{r+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^r(\mathfrak{g})] \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}] = \{0\}.$$

故に $\mathfrak{g}$ はべき零である.　　$\underline{q.e.d}$

7　Engel の定理

Def. 7.1

V: $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間, $f \in \mathrm{End}(V)$ (i.e. $f : V \to V$ 線型写像) に対して

$$f\text{: べき零 (1次変換)} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } f^n = 0.$$

また, $A \in M(n, \mathbf{R})$ に対して

$$A\text{: べき零} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } A^n = O.$$

Ex. 7.2

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^3$ への線型写像) は

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

となるのでべき零である.

Lem. 7.3

$X, Y \in M(n, \mathbf{R})$, $XY = YX$ とする. このとき

$$X,\, Y\text{: べき零} \Rightarrow \alpha X + \beta Y\text{: べき零 for } \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

$(\because)$ $\Leftarrow$ は自明であるので, $\Rightarrow$ のみ示す.
仮定より

$$\exists m, n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } X^m = 0, Y^n = 0.$$

従って, $XY = YX$ より

$$(\alpha X + \beta Y)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m+n} \alpha^i \beta^{m+n-i} {}_{m+n}C_i X^i Y^{m+n-i}$$

ここで

　　$0 \le i \le m$ のときには $(n \le m + n - i$ より$)$ $Y^{m+n-i} = 0$,
　　$m + 1 \le i \le n + m$ のときには $X^i = 0$

となるので

$$(\alpha X + \beta Y)^{m+n} = 0.$$

従って, $\alpha X + \beta Y$ はべき零である.　　<u>$q.e.d$</u>

問 24

Lem. 7.3 に対して

(i) $X-Y$ がべき零であることを示せ.

(ii) 逆向き (の矢印) も成立することを示せ (Hint: Lem. 7.3 を用いるとよい).

Lem. 7.4

$$x \in \mathfrak{g}l(n,\mathbf{R})(=M(n,\mathbf{R})) \text{: べき零} \Rightarrow \mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g}l(n,\mathbf{R}) \to \mathfrak{g}l(n,\mathbf{R}) \text{: べき零}$$

$(\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}l(n,\mathbf{R})) \subseteq \mathrm{End}(\mathfrak{g}l(n,\mathbf{R})))$

$(\because)$ $l_x, r_x : \mathfrak{g}l(n,\mathbf{R}) \to \mathfrak{g}l(n,\mathbf{R})$ を

$$l_x(y) := xy, \quad r_x(y) := yx$$

で定義すると $l_x, r_x \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}l(n,\mathbf{R}))$ であることが容易に確かめられる.
x がべき零より

$$\exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } x^n = 0.$$

よって

$$(l_x)^n(y) = x^n y = 0y = 0, \quad (r_x)^n(y) = yx^n = y0 = 0 \text{ for } \forall y \in \mathfrak{g}l(n,\mathbf{R})$$

となり l_x, r_x もべき零である.
さらに $l_x r_x = r_x l_x$ でもあるので Lem. 7.3 より $l_x - r_x$ はべき零.
よって $\mathrm{ad}(x) = l_x - r_x$ より $\mathrm{ad}(x)$ はべき零である.　　<u>*q.e.d*</u>

Lem. 7.5

V: $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間, W: V の部分空間, $x \in \mathrm{End}(V)$, $x(W) \subseteq W$ とする. このとき

$$x\text{: べき零} \Leftrightarrow x|_W(\in \mathrm{End}(W)),\ x|_{V/W}(\in \mathrm{End}(V/W))\text{: べき零}.$$

ただし, ここで

$$V/W = \{v + W(=: \overline{v}) | v \in V\}^{12}, \quad \overline{v} + \overline{u} = \overline{u+v}, \quad \alpha\overline{v} = \overline{\alpha u}$$

であり

$$x|_{V/W}(\overline{v}) := \overline{x(v)}(= x(v) + W)$$

として定義している (well-defined であることを各自チェックせよ).

[12] V に $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in W$ で同値関係をいれた同値類の集合

$(\because)$ $\Rightarrow$) 仮定より

$$\exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } x^n = 0.$$

よって

$$(x|_W)^n(w) = x^n(w) = 0 \text{ for } \forall w \in W, \quad (x|_{V/W})^n(\overline{v}) = \overline{x^n(v)} = \overline{0} \text{ for } \forall v \in V$$

となるので $x|_W$, $x|_{V/W}$ はべき零である.
$\Leftarrow$) 仮定より

$$\exists m, r \in \mathbf{N} \text{ s.t. } (x|_W)^m = 0, (x|_{V/W})^r = 0.$$

言い換えると

$$x^m(w) = 0 \text{ for } \forall w \in W, \quad \overline{x^r(v)} = \overline{0} (\Leftrightarrow x^r(v) \in W) \text{ for } \forall v \in V.$$

よって

$$x^{m+r}(v) = x^m(x^r(v)) = 0 \text{ for } \forall v \in V$$

となるので x はべき零である.　<u>*q.e.d*</u>

Lem. 7.6

$$\mathfrak{g}\text{: べき零 Lie algebra} \Rightarrow \text{任意の } x \text{ に対して } \mathrm{ad}(x) \text{ はべき零.}$$

$(\because)$ 仮定より

$$\exists n \in \mathbf{N} \text{ s.t. } C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

ここで $y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y] \in C^1(\mathfrak{g}), \\
&\mathrm{ad}(x)^2(y) = [x, [x, y]] \in C^2(\mathfrak{g}), \\
&\vdots \\
&\mathrm{ad}(x)^r(y) \in C^r(\mathfrak{g}), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

であるので

$$\mathrm{ad}(x)^n(y) \in C^n(\mathfrak{g}) = \{0\} \text{ for } \forall y \in \mathfrak{g}.$$

よって $\mathrm{ad}(x)$ はべき零である.　<u>*q.e.d*</u>

★ $\mathfrak{g}$ が特別の場合には Lem. 7.6 の逆も成立する.

Th. 7.7 (Engel の定理[13])

$\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}l(n, \mathbf{R})$ の部分 Lie algebra とする.

[13]実際は標数 0 の体上の有限次元ベクトル空間を V としたときの $\mathfrak{g}l(V)$ の部分 Lie algebra に対して成立している.

$$\text{任意の } x \in \mathfrak{g} \text{ に対して } \mathrm{ad}(x) \text{ はべき零} \Rightarrow \mathfrak{g} \text{ はべき零}.$$

Engel の定理は次の定理から容易に導かれる.

Th. 7.8

V: $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 ($\neq \{0\}$),
$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V)$ $\mathfrak{g}$ の表現 (i.e. Lie algebra としての準同型写像) とする.
任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x) \in \mathfrak{g}l(V)(= \mathrm{End}(V))$ がべき零ならば

$$\begin{aligned}&\exists\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} : V \text{ の基底}\\ &\text{s.t. } \rho(x)(v_1, v_2, \cdots, v_n) \in (v_1, v_2, \cdots, v_n)\mathfrak{g}_1(n, \mathbf{R}) \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}\end{aligned}$$

($\mathfrak{g}_1(n, \mathbf{R}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathfrak{g}l(n, \mathbf{R}) | a_{ij} = 0 \text{ if } i \geq j\}$)
i.e.

$$\rho(x)(v_1, v_2, \cdots, v_n) = (v_1, v_2, \cdots, v_n)\begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

の形

(定理 7.8 $\Rightarrow$ 定理 7.7 の証明)
$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x)$ はべき零であるので $\rho = \mathrm{ad}$, $V = \mathfrak{g}$ と考えると定理.7.8 より

$$\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{g}_1(n, \mathbf{R}) \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}$$

(ただし, $\mathrm{ad}(x)$ を $\mathfrak{g}$ の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ に関する表現行列と同一視している)
また, ad は $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ への準同型写像であるので $\mathrm{Im(ad)}$ は $\mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ の部分 Lie algebra.
従って特に $\mathfrak{g}_1(n, \mathbf{R})$ の部分 Lie algebra でもある.
$\mathfrak{g}_1(n, \mathbf{R})$ は問題 21 よりべき零 Lie algebra であるので

$$\mathrm{Im(ad)}(= \mathrm{ad}(\mathfrak{g})) \text{ もべき零 Lie algebra.}$$

ここで

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker(ad)} &= \{x \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}(x) = 0\}\\ &= \{x \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}(x)(y) = 0 \text{ for } \forall y \in \mathfrak{g}\}\\ &= \{x \in \mathfrak{g} | [x, y] = 0 \text{ for } \forall y \in \mathfrak{g}\}\\ &= \mathfrak{z} \quad (\mathfrak{g} \text{ の中心})\end{aligned}$$

であるので準同型定理より

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{z} \simeq \mathrm{ad}(\mathfrak{g}).$$

従って $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ もべき零である. よって定理 6.7 より $\mathfrak{g}$ はべき零である. <u>*q.e.d*</u>

定理 7.8 は次の Lem. から示される.

Lem. 7.9
V: $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間 $(\neq \{0\})$,
$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V)$: $\mathfrak{g}$ の表現とする.
任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x)$ がべき零ならば

$$\exists v \in V - \{0\} \text{ s.t. } \rho(x)v = 0 \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}.$$

(i.e. 固有値 0 に対する共通の固有ベクトルが存在する).

(Lem. 7.9 $\Rightarrow$ 定理 7.8 の証明)
$\dim V$ に関する帰納法により示す.
$\dim V = 1$ のとき
Lem. 7.9 より

$$\exists v \in V - \{0\} \text{ s.t. } \rho(x)(v) = (v)(0) \quad \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}.$$

$(0) \in \mathfrak{g}_1(1, \mathbf{R})$ で, $\{v\}$ は V の基底となるので o.k. [14] $\dim V = n-1$ まで成立したと仮定し, $\dim V = n$ のときを示す $(n \geq 2)$.
Lem. 7.9 より

$$\exists v_1 \in V - \{0\} \text{ s.t. } \rho(x)v_1 = 0 \quad \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}.$$

従って $V_1 := \mathbf{R}v_1$ とおくと

$$\rho(x)V_1 \subseteq V_1 \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g} \cdots (\text{☆})^{15}.$$

よって

$$\rho_{V/V_1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V/V_1); x \mapsto \rho_{V/V_1}(x), \quad \rho_{V/V_1}(x)(\overline{v}) := \overline{\rho(x)(v)}$$

$(\overline{v} = v + V_1)$ とおくと ρ_{V/V_1} は $\mathfrak{g}$ の表現となる (各自チェックせよ).
ここで $\dim V/V_1 = \dim V - \dim V_1 = n-1$ であり, 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x)$ はべき零より
$\rho_{V/V_1}(x)$ も Lem. 7.5 と同様に考えるとべき零である.
よって帰納法の仮定より

$\exists\{\overline{v_2}, \overline{v_3}, \ldots, \overline{v_n}\}(v_i \in V, \overline{v_i} = v_i + V_1 \text{ for } i \in \{2, 3, \ldots, n\})$: V/V_1 の基底
s.t. 任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\rho_{V/V_1}(x)(\overline{v_2}, \overline{v_3}, \ldots, \overline{v_n}) = (\overline{v_2}, \overline{v_3}, \ldots, \overline{v_n}) \begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ の形.}$$

[14] または直接に $\rho(x) : V \to V$ 線型写像より $\rho(x)v = \alpha_x v$ で, $\rho(x)$ はべき零より $\alpha_x = 0$. 即ち $\rho(x) \equiv 0$ for all $x \in \mathfrak{g}$. よって $v \in V - \{0\}$ に対して $\rho(x)(v) = (v)(0)$ となるでも o.k.
[15] これは $\rho_{V/V_1}(x)$ の well-defined に必要

特にこのとき

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\text{: } V \text{ の基底}$$

となっている.
ちょっと示してみよう.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0 \quad &\Rightarrow \overline{\sum_{i=1}^n a_i v_i} = \overline{0} \\
&\Rightarrow \sum_{i=2}^n a_i \overline{v_i} + a_1 \overline{v_1} = \overline{0} \\
&\Rightarrow \sum_{i=2}^n a_i \overline{v_i} = \overline{0} \quad (\because \ v_1 \in V_1)
\end{aligned}$$

従って $\{\overline{v_2}, \ldots, \overline{v_n}\}$: V/V_1 の基底より

$$a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0, a_1 v_1 = 0.$$

$v_1 \neq 0$ より即ち

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

故に $v_1, v_2, \ldots, v_n$ は線型独立. $\dim V = n$ よりこれで o.k. である.
実際, 任意の V の元が $v_1, v_2, \ldots, v_n$ の線形結合で表せることは次を見れば理解できるはず.

$$\begin{aligned}
v \in V \quad &\Rightarrow \overline{v} \in V/V_1 \\
&\Rightarrow \exists a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \text{ s.t. } \overline{v} = a_2 \overline{v_2} + \cdots + a_n \overline{v_n} (= \overline{\textstyle\sum_{i=2}^n a_i v_i}) \\
&\Rightarrow v - \sum_{i=2}^n a_i v_i \in V_1 = \mathbf{R} v_1 \\
&\Rightarrow \exists a_1 \in \mathbf{R} \text{ s.t. } v - \sum_{i=2}^n a_i v_i = a_1 v_1 \\
&\Rightarrow v = \sum_{i=1}^n a_i v_i.
\end{aligned}$$

(実際はどちらか片方でよい)
本題に戻る.
更に

$$\begin{aligned}
&\rho_{V/V_1}(x)(\overline{v_2}) = \overline{0}, \\
&\rho_{V/V_1}(x)(\overline{v_i}) \in \mathbf{R}\overline{v_2} + \mathbf{R}\overline{v_3} + \ldots + \mathbf{R}\overline{v_{i-1}} \quad \text{for } i > 2
\end{aligned}$$

より

$$\rho(x)(v_i) \in \mathbf{R} v_1 + \mathbf{R} v_2 + \ldots + \mathbf{R} v_{i-1} \quad \text{for } i \geq 2.$$

従って $\rho(x) v_1 = 0$ より $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\rho(x)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

の形となる.
よって帰納法により証明された. $\underline{q.e.d}$

故に Engel の定理を証明するためには Lem. 7.9 を示すとよい.
証明はちょっと長いのだが頑張って示そう.

(Lem. 7.9 の証明) $\rho(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}l(V)$ の部分空間[16]であるので, $\dim\rho(\mathfrak{g})$ に関する帰納法により証明する.
$\dim\rho(\mathfrak{g}) = 0$ のとき $\rho(\mathfrak{g}) = \{0\}(\subseteq \mathfrak{g}l(V))$ であるので

$$\rho(x) = 0 \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{g} \text{ (ここで 0 は零行列)}$$

よって $V \neq \{0\}$ より $v \in V - \{0\}$ を一つ取ると

$$\rho(x)v = 0 \qquad \text{for } \forall x \in \mathfrak{g}$$

となり o.k.
$\dim\rho(\mathfrak{g}) \leq n-1$ $(n \geq 1)$ まで Lem. が成立していると仮定し $\dim\rho(\mathfrak{g}) = n$ のときを示す.
$k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対して

$$A_k(\mathfrak{g}) := \{\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}\text{:部分 Lie algebra } | \rho(\mathfrak{h}) \subset \rho(\mathfrak{g})\text{(真部分集合)}, \dim\mathfrak{h} = k\}$$

とおき ($\dim\rho(\mathfrak{g}) \geq 1$, $A_0(\mathfrak{g}) = \{\{0\}\}$ に注意)

$$m := \max\{k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} | A_k(\mathfrak{g}) \neq \phi\}$$

とし, $\mathfrak{h}$ を $A_m(\mathfrak{g})$ の元とする ($\mathfrak{h} = \{0\}$ の場合もあり得る) [17].

$$\mathfrak{a} := \mathrm{Ker}\rho (= \{x \in \mathfrak{g}; \rho(x) = 0\})$$

とおく. このとき $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであるので $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie algebra となっている.

Case 1. $\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ のとき.

$$\dim\rho(\mathfrak{h}) < \dim\rho(\mathfrak{g}), \quad \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$$

であるので帰納法の仮定より

$$\exists v \in V - \{0\} \text{ s.t. } \rho(h)v = 0 \text{ for } \forall h \in \mathfrak{h}. \tag{4}$$

ここで, $\mathfrak{h} + \mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ より, $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\exists h_x \in \mathfrak{h}, \exists a_x \in \mathfrak{a} \text{ s.t. } x = h_x + a_x.$$

従って, $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned} \rho(x)v &= \rho(h_x + a_x)(v) \\ &= (\rho(h_x) + \rho(a_x))v \\ &= \rho(h_x)v \quad (\because\ a_x \in \mathfrak{a}(= \mathrm{Ker}\rho)) \\ &= 0 \quad (\because\ (4)) \end{aligned}$$

[16]表現 ⇒ 準同型 ⇒ 線型写像
[17]i.e. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\rho(\mathfrak{h}) \subset \rho(\mathfrak{g})$ となる $\mathfrak{g}$ の部分 Lie algebra の中で次元が最大のものの一つ

となり成立.

Case 2. $\mathfrak{h}+\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$ のとき.
$\rho:\mathfrak{g}\to\rho(\mathfrak{g})(\subseteq\mathfrak{g}l(V))$, $\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}:\rho(\mathfrak{g})\to\mathfrak{g}l(\rho(\mathfrak{g}))$ は表現 (Lie algebra としての準同型写像) であるのでその合成写像

$$\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\circ\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}l(\rho(\mathfrak{g}))$$

も $\mathfrak{g}$ の表現.
従って,

$$\widetilde{\rho}:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}l(\rho(\mathfrak{g}))$$

を

$$\widetilde{\rho}(h):=\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(h))(=\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\circ\rho|_{\mathfrak{h}}(h))$$

と定義すると, $\widetilde{\rho}$ は $\mathfrak{h}$ の表現である
ここで $\forall h,h'\in\mathfrak{h}$ に対して

$$\widetilde{\rho}(h)(\rho(h'))=(\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}(\rho(h)))(\rho(h'))=[\rho(h),\rho(h')]=\rho([h,h'])\in\rho(\mathfrak{h}) \qquad (5)$$

であるので $\widetilde{\rho}':\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}l(\rho(\mathfrak{g})/\rho(\mathfrak{h}))$ を

$$\widetilde{\rho}'(h)(\overline{\rho(x)}):=\overline{\widetilde{\rho}(h)(\rho(x))}$$

と定義できる.
$(\because\ \overline{\rho(x)},\overline{\rho(y)}\in\rho(\mathfrak{g})/\rho(\mathfrak{h})$ に対して

$$\begin{aligned}\overline{\rho(x)}=\overline{\rho(y)}\ &\Rightarrow\rho(x)-\rho(y)\in\rho(\mathfrak{h})\\ &\Rightarrow\widetilde{\rho}(h)(\rho(x)-\rho(y))\in\rho(\mathfrak{h})(\because\ (5))\\ &\Rightarrow\widetilde{\rho}(h)(\rho(x))-\widetilde{\rho}(h)(\rho(y))\in\rho(\mathfrak{h})\\ &\Rightarrow\overline{\widetilde{\rho}(h)(\rho(x))}=\overline{\widetilde{\rho}(h)(\rho(y))}\quad)\end{aligned}$$

また, $\widetilde{\rho}'$ が表現となっていることも容易にチェックできる.
ここで, $x\in\mathfrak{h}$ に対して, 仮定より $\rho(x)\in\rho(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{g}l(V)$ はべき零であるので $\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\rho(x)(=\widetilde{\rho}(x))$ もべき零 $(\because$ Lem. 7.4).
従って, $\widetilde{\rho}'(x)$ もべき零.
$(\because\ \widetilde{\rho}(x)^m=0$ とすると $\forall\overline{\rho(y)}\in\rho(\mathfrak{g})/\rho(\mathfrak{h})$ に対して

$$\widetilde{\rho}'(x)^m(\overline{\rho(y)})=\overline{\widetilde{\rho}(x)^m(\rho(y))}=\overline{0}$$

より $\widetilde{\rho}'(x)$ もべき零.)
さらに次が成立している.

$$\dim\widetilde{\rho}'(\mathfrak{h})\leq\dim\rho(\mathfrak{h})<\dim\rho(\mathfrak{g})$$

($\because$ $\mu : \rho(\mathfrak{h}) \to \mathfrak{g}l(\rho(\mathfrak{g})/\rho(\mathfrak{h}))$ を

$$\mu(\rho(h))(\overline{\rho(x)}) := \overline{[\rho(h), \rho(x)]}(= \widetilde{\rho}'(h)(\overline{\rho(x)}))$$

で定義すると μ は $\mathbf{R}$ 上の線型写像となるので[18] $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ を $\rho(\mathfrak{h})$ の基底とすると $\mu(\rho(\mathfrak{h}))$ は $\{\mu(v_1), \mu(v_2), \ldots, \mu(v_m)\}$ で生成されるので

$$\dim\rho(\mathfrak{h}) \geq \dim\mu(\rho(\mathfrak{h})) = \dim\widetilde{\rho}'(\mathfrak{h}). \quad)$$

よって帰納法の仮定より

$$\exists u \in \rho(\mathfrak{g}) \text{ s.t. } \overline{u} \in \rho(\mathfrak{g})/\rho(\mathfrak{h}) - \{\overline{0}\}, \widetilde{\rho}'(x)\overline{u} = \overline{0} \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{h}.$$

言い替えると

$$\overline{\widetilde{\rho}(x)(u)} = \overline{0} \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{h}$$

となるので

$$\widetilde{\rho}(x)(u) \in \rho(\mathfrak{h}) \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{h}.$$

ここで, $u \in \rho(\mathfrak{g})$ より

$$\exists y \in \mathfrak{g} \text{ s.t. } u = \rho(y).$$

従って, まとめると

$$\widetilde{\rho}(x)(\rho(y)) \in \rho(\mathfrak{h}) \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{h}.$$

即ち

$$[\rho(x), \rho(y)](= \rho([x, y])) \in \rho(\mathfrak{h}) \text{ for } \forall x \in \mathfrak{h}. \tag{6}$$

ここで,

$$[x, y] \in \mathfrak{h} + \mathfrak{a} \text{ for } \forall x \in \mathfrak{h}$$

となることが (6) よりわかる ($\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}\rho$).
($\because$ (6) より $x \in \mathfrak{h}$ に対して $\rho([x, y]) \in \rho(\mathfrak{h})$ であるので[19]

$$\exists h_x \in \mathfrak{h} \text{ s.t. } \rho([x, y]) = \rho(h_x).$$

よって $\rho([x, y] - h_x) = 0$ となるので

$$[x, y] - h_x \in \mathfrak{a}$$

故に $[x, y] \in \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$.)
さらに, $\mathfrak{h}$ の取り方より

$$[x, y] \in \mathfrak{h} \text{ for } \forall x \in \mathfrak{h}. \tag{7}$$

---

[18] 次元定理よりといってもいいのだが...
[19] 今 y は fix されていることに注意

($\because$

$$\rho(\mathfrak{h}+\mathfrak{a}) = \rho(\mathfrak{h})+\rho(\mathfrak{a}) = \rho(\mathfrak{h}) \subset \rho(\mathfrak{g})$$

であり, Case 2. の条件とあわせると

$$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h}+\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}.$$

従って, もし $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ ならば

$$\dim\mathfrak{h} < \dim(\mathfrak{h}+\mathfrak{a}) < \dim\mathfrak{g}$$

となり $\mathfrak{h}$ の取り方に反する. よって $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}+\mathfrak{a}$ となるので o.k.)
従って, $\mathfrak{h}+\mathbf{R}y$ は $\mathfrak{g}$ の部分 Lie algebra である
($\because$ $\mathfrak{h}+\mathbf{R}y$ が $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間であることはよい.
$h, h' \in \mathfrak{h}, a, b \in \mathbf{R}$ に対して (7) より

$$[h+ay, h'+by] = [h,h'] + b[h,y] - a[h',y] \in \mathfrak{h}.$$

よって o.k.)
このとき

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}+\mathbf{R}y (\subseteq \mathfrak{g}) \tag{8}$$

となっている.
($\because$

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}=\mathfrak{h}+\mathbf{R}y \ &\Rightarrow y \in \mathfrak{h}\\ &\Rightarrow \rho(y) \in \rho(\mathfrak{h})\\ &\Rightarrow u \in \rho(\mathfrak{h})\\ &\Rightarrow \overline{u} = \overline{0} \in \rho(\mathfrak{g})/\rho(\mathfrak{h})\end{aligned}$$

であるので, $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}+\mathbf{R}y$ ならば

$$\overline{u} \in \rho(\mathfrak{g})/\rho(\mathfrak{h}) - \{\overline{0}\}$$

に矛盾.)
さらに

$$\rho(\mathfrak{h}+\mathbf{R}y) \subseteq \rho(\mathfrak{g}) \quad (\because\ y \in \mathfrak{g})$$

であり, とくに

$$\rho(\mathfrak{h}+\mathbf{R}y) = \rho(\mathfrak{g})$$

となっている.
($\because$ $\rho(\mathfrak{h}+\mathbf{R}y) \subset \rho(\mathfrak{g})$ とすると,

$$\mathfrak{h}+\mathbf{R}y \subset \mathfrak{g}$$

であり, (8) とあわせると

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h} + \mathbf{R}y \subset \mathfrak{g}$$

となり, $\mathfrak{h}$ の取り方に矛盾する.)

従って $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ より[20] $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h}$ であるので

$$\mathfrak{h} + \mathbf{R}y = \mathfrak{g}$$

($\because$ $z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\rho(z) = \rho(h + py) \Rightarrow z - (h + py) \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{h} \Rightarrow z \in \mathfrak{h} + \mathbf{R}y.$$

よって $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{h} + \mathbf{R}y$.
他方 $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$ より $\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{h} + \mathbf{R}y$.
故に等号成立.)

$$W := \{v \in V | \rho(x)v = 0 \text{ for } \forall x \in \mathfrak{h}\}$$

とおくと $\dim\rho(\mathfrak{h}) < \dim\rho(\mathfrak{g})$ であるので帰納法の仮定より

$$W \neq \{0\}.$$

特に $\rho(y)W \subseteq W$ となっている.
($\because$ $w \in W$ に対して $\rho(y)w \in W$ を示す.
$\forall x \in \mathfrak{h}$ に対して

$$\begin{aligned}
\rho(x)(\rho(y)w) &= [\rho(x), \rho(y)](w) + \rho(y)(\rho(x)(w)) \\
&= \rho([x, y])(w) + \rho(y)(\rho(x)(w)) \\
&= 0 \quad (\because\ [x, y] \in \mathfrak{h}\ (\because\ (7)),\ x \in \mathfrak{h},\ w \in W)
\end{aligned}$$

よって成立している.)
従って $\rho(y)W \subseteq W$ より $\rho(y) \in \mathfrak{gl}(W)$.
(W がベクトル空間であることは定義より自明).
仮定より $\rho(y)$ は $\mathfrak{gl}(V)$ の元とみてべき零より, $\mathfrak{gl}(W)$ の元とみたときもべき零 ($\because$ $W \subseteq V$).
従って, $\rho(y) \neq 0$ [21]より

$$\exists n \geq 2 \text{ s.t. } \rho(y)^n = 0, \rho(y)^{n-1} \neq 0 \text{ in } \mathfrak{gl}(W).$$

よって,

$$\exists r' \in W \text{ s.t. } \rho(y)^{n-1}r' \neq 0.$$

従って, $r := \rho(y)^{n-1}r'$ とおくと

$$r \in W - \{0\}, \rho(y)r = 0.$$

[20]($\because$ (7) の証明の中で示している)
[21]$\rho(y) = 0$ ならば $\rho(y) \in \rho(\mathfrak{h})$. 即ち $\overline{u} = \overline{0}$ となり矛盾

また, $r \in W$ より
$$\rho(x)r = 0 \text{ for } \forall x \in \mathfrak{h}.$$
従って $g \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathbf{R}y$ より $g = h + cy$ とすると
$$\rho(g)r = \rho(h + cy)r = \rho(h)r + c\rho(y)r = 0.$$
以上により題意が証明された. $\underline{q.e.d}$

8 Lie の定理

この章では特に断らない限り V を $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする.

Th. 8.1

$L \subseteq \mathfrak{g}l(V)$: 可解 Lie algebra, $L \neq \{0\}$ とし,
$\forall x \in L$ に対して, x の固有値は全て実数とする[22].
このとき

$$\exists \mu : L \to \mathbf{R} : \text{線型写像}, \quad \exists v \in V - \{0\}$$
$$\text{s.t. } xv = \mu(x)v \text{ for } \forall x \in L.$$

(i.e. L には共通の固有ベクトルが存在する.)

定理の証明の前に Lem. を 2 つ示す.

Lem. 8.2

Th.8.1 と同じ状況の下で

$$\exists K: \ L \text{ のイデアル s.t. } \dim K = \dim L - 1.$$

($\because$) L: 可解, $L \neq \{0\}$ より

$$D^1(L) = [L, L] \subset L \quad (\text{真部分集合}).$$

($\because$ $D^1(L) = L \Rightarrow D^k(L) = L$ for $\forall k \in \mathbf{N}$ となり L: 可解に矛盾).
よって, $D^1(L)$ は L のイデアル[23]で,

$$\dim D^1(L) < \dim L.$$

ここで, Lem.5.3 の証明より

$$D^1(L/D^1(L)) = \{\bar{0}\}$$

となっているので $L/D^1(L)$ は可換 Lie alg. である.
従って, 任意の $L/D^1(L)$ の部分空間は $L/D^1(L)$ のイデアル.
よって

$$\exists \overline{K}: \ L/D^1(L) \text{ のイデアル s.t. } \dim \overline{K} = \dim(L/D^1(L)) - 1.$$

($L/D^1(L) \neq \{\bar{0}\}$ より $\dim(L/D^1(L)) \geq 1$ に注意)
そこで

$$\pi : L \to L/D^1(L) \quad (\text{標準的準同型写像})$$

[22] i.e. x の固有多項式が $\mathbf{R}[t]$ で一次の積に分解できるということ
[23] 一般に $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば $D^1(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{g}$ のイデアル

とし (i.e. $\pi(x) := \overline{x} = x + D^1(L)$),

$$K := \pi^{-1}(\overline{K})(= \{x \in L \mid \pi(x) \in \overline{K}\})$$

とおくと

$$L/K \simeq (L/D^1(L))/\overline{K} \quad \text{(Lie alg. としての準同型写像)} \tag{9}$$

となっている.
この等式 (9) は次のようにして示される.
まず $\varphi : L \to (L/D^1(L))/\overline{K}$ を

$$\varphi(x) := \overline{\pi(x)}(= \pi(x) + \overline{K})$$

とおくと φ は全射準同型写像となることが容易にわかる (各自チェックせよ) [24].
さらに

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\varphi &= \{x \in L \mid \varphi(x) = \overline{0} \text{ in } (L/D^1(L))/\overline{K}\} \\
&= \{x \in L \mid \pi(x) + \overline{K} = \overline{K}\} \\
&= \{x \in L \mid \pi(x) \in \overline{K}\} \\
&= K
\end{aligned}$$

となるので, 準同型定理より (9) が成立する.
従って,

$$\dim(L/D^1(L))/\overline{K} = \dim(L/D^1(L)) - \dim\overline{K} = 1$$

より

$$\dim(L/K) = 1.$$

即ち

$$\dim K = \dim L - 1.$$

K は $K = \mathrm{Ker}\varphi$ より L のイデアルであるので求めるイデアルの存在が示された.
<u>*q.e.d*</u>

Lem. 8.3

Th.8.1 の状況に次の条件を加える.
K: L のイデアル, $\rho : K \to \mathbf{R}$: 線型写像に対して $\exists v \in V - \{0\}$ s.t.

$$xv = \rho(x)v \quad \text{for } \forall x \in K$$

とする.
このとき $x \in K$, $y \in L$ に対して

$$\rho([x, y]) = 0.$$

[24] 証明は π が全射準同型であることを用いると剰余 Lie alg. の定義より容易

($\because$) $y \in L \subseteq \mathfrak{g}l(V)$ であることと, V: 有限次元ベクトル空間より

$$
\begin{aligned}
&\exists n \in \mathbf{N} \\
&\text{ s.t. } v, yv, y^2v, \ldots, y^{n-1}v\text{: 線型独立} \\
&\qquad v, yv, y^2v, \ldots, y^{n-1}v, y^n v\text{: 線型従属.}
\end{aligned}
$$

そこで,

$$
\begin{aligned}
W_0 &:= \{0\}, \\
W_1 &:= \mathbf{R}v, \\
W_2 &:= \mathbf{R}v + \mathbf{R}yv, \\
W_3 &:= \mathbf{R}v + \mathbf{R}yv + \mathbf{R}y^2v, \\
&\vdots \\
W_n &:= \mathbf{R}v + \mathbf{R}yv + \mathbf{R}y^2v + \ldots + \mathbf{R}y^{n-1}v \quad \text{ for } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
&W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_n, \\
&\mathrm{dim} W_i = i \text{ for } 0 \leq i \leq n, \\
&yW_i \subseteq W_{i+1} \text{ for } 0 \leq i < n, \\
&yW_n \subseteq W_n
\end{aligned}
$$

となっている.
まず, このとき $\forall w \in K$, $0 \leq i \leq n$ に対して

$$
wy^i v \in \rho(w) y^i v + W_i \tag{10}
$$

となることを i に関する帰納法により示す.
$i = 0$ のとき

$$
wy^0 v = wv = \rho(w)v \in \rho(w)v + W_0
$$

となり成立.
$i-1$ まで成立していると仮定して, i のときを示す ($i \geq 1$).

$$
\begin{aligned}
wy^i v &= wyy^{i-1}v \\
&= ([w, y] + yw)y^{i-1}v \\
&= [w, y]y^{i-1}v + ywy^{i-1}v \\
&\in \rho([w, y])y^{i-1}v + W_{i-1} + y(\rho(w)y^{i-1}v + W_{i-1}) \\
&\qquad (\because \text{ 帰納法の仮定と } K \text{ は } L \text{ のイデアルより } [w, y] \in K) \\
&\subseteq y\rho(w)y^{i-1}v + yW_{i-1} + W_i \quad (\because\ y^{i-1}v \in W_i,\ W_{i-1} \subset W_i) \\
&\subseteq \rho(w)y^i v + W_i \quad (\because\ yW_{i-1} \subseteq W_i).
\end{aligned}
$$

従って, 帰納法により (10) が成立する.
故に, (10) より $w \in K$ に対して

$$
\begin{aligned}
& w(v, yv, y^2v, \ldots, y^{n-1}v) \\
& = (v, yv, y^2v, \ldots, y^{n-1}v) \begin{pmatrix} \rho(w) & * & * & \cdots & * \\ 0 & \rho(w) & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \rho(w) & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \rho(w) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので $w \in \mathfrak{gl}(W_n)$ とみてよい. 従って, そのときのトレースを tr_{W_n} で表すことにすると

$$\mathrm{tr}_{W_n} w = n\rho(w).$$

従って, $x \in K$ のとき $[x, y] \in K$ であるので

$$\mathrm{tr}_{W_n}[x, y] = n\rho([x, y]). \tag{11}$$

ここで $x \in K$ より w と同様に $x \in \mathfrak{gl}(W_n)$ と考えてよく,
また W_n の定義より $y \in \mathfrak{gl}(W_n)$ と考えてもよい.
従って

$$\mathrm{tr}_{W_n}[x, y] = \mathrm{tr}_{W_n}(xy) - \mathrm{tr}_{W_n}(yx) = 0. \tag{12}$$

よって (11), (12) より

$$\rho([x, y]) = 0$$

となり, Lem. が証明された. <u>*q.e.d*</u>

(定理 8.1 の証明)
$\dim L$ に関する帰納法により示す.
$\dim L = 1$ のとき

$$\exists z \in L \text{ s.t. } L = \mathbf{R}z.$$

λ, v_0 を z の固有値と固有ベクトルの１つとすると

$$zv_0 = \lambda v_0.$$

よって $\mu : L \to \mathbf{R}$ を $\mu(rz) := r\lambda$ とおくと μ は線型写像で

$$(rz)v_0 = r(zv_0) = r\lambda v_0 = \mu(rz)v_0$$

となるので o.k. (i.e. v_0 が L の共通の固有ベクトル).
$\dim L = k - 1$ まで o.k. とし, $\dim L = k$ のときを示す ($k \geq 2$).
Lem.8.2 より

$$\exists K : \ L \text{ のイデアル s.t. } \dim K = \dim L - 1.$$

可解 Lie alg. のイデアルは可解より K も可解 Lie alg.
さらに, L の元の固有値は全て実数より K の元の固有値も全て実数.
よって, 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}&\exists\rho : K \to \mathbf{R} : \text{線型写像}, \exists v_1 \in V - \{0\}\\ &\text{s.t. } xv_1 = \rho(x)v_1 \text{ for } \forall x \in K.\end{aligned}$$

従って, この ρ に対して

$$W := \{u \in V \mid xu = \rho(x)u \text{ for } \forall x \in K\}$$

とおくと W は $\{0\}$ でない L-不変[25] な V の部分空間となる.
($\because$)
部分空間となることは容易にチェックできるので (各自チェックせよ), L-不変であることを示す.
任意の $x \in K$, $y \in L$, $v \in W$ に対して

$$x(yv) = \rho(x)(yv)$$

となることを示すとよい.

$$\begin{aligned}x(yv) &= (xy)v\\ &= ([x,y] + yx)v\\ &= [x,y]v + yxv\\ &= \rho([x,y])v + y\rho(x)v \quad (\because\ x, [x,y] \in K,\ v \in W)\\ &= \rho(x)yv \quad (\because\ \text{Lem.8.3})\end{aligned}$$

故に W は L-不変である.
本題に戻る.
$\dim L = \dim K + 1$ より

$$\exists u \in L \text{ s.t. } L = K + \mathbf{R}u \quad (\text{直和}).$$

W は L-不変であるので

$$uW \subseteq W.$$

従って, u を $\mathfrak{gl}(W)$ の元とみたときの固有値と固有ベクトルの一つを $\alpha \in \mathbf{R}$, $v \in W - \{0\}$ とおく[26].
このとき $x \in L$ に対して $L = K + \mathbf{R}u$ より

$${}^{\exists!}y \in K, {}^{\exists!}r \in \mathbf{R} \text{ s.t. } x = y + ru$$

[25] $yW \subseteq W$ for $\forall y \in L$
[26] $W \subseteq V$ より α は $u \in \mathfrak{gl}(V)$ の固有値でもあるので $\alpha \in \mathbf{R}$

であるので $\mu : L \to \mathbf{R}$ を

$$\mu(x)(= \mu(y + ru)) := \rho(y) + r\alpha$$

と定義できる.
このとき μ は線型写像であることは容易にチェックできる (各自チェックせよ).
さらに

$$\begin{aligned} xv &= (y + ru)v \\ &= yv + ruv \\ &= \rho(y)v + r\alpha v \\ &= (\rho(y) + r\alpha)v \\ &= \mu(x)v. \end{aligned}$$

となるので帰納法により証明が完了した.　　<u>*q.e.d*</u>

Th. 8.4

$\mathfrak{g}$:($\mathbf{R}$ 上の) 可解 Lie alg.,
V:($\mathbf{R}$ 上の) n 次元ベクトル空間 ($n \geq 1$),
$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V)$: 表現,
$\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x)$ の固有値は全て実数とする.
このとき

$\exists\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$: V の基底

$$\text{s.t. } \rho(x)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}.$$

($* \in \mathbf{R}$)

($\because$) dim$V$ に関する帰納法により示す.
dim$V = 1$ のとき

$$V = \mathbf{R}v$$

とすると $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x) \in \mathfrak{g}l(V) = \mathfrak{g}l(\mathbf{R}v)$ より
($\rho(x)$ は 1 次元ベクトル空間上の線型写像であるので)

$$\exists\alpha_x \in \mathbf{R} \text{ s.t. } \rho(x)v = \alpha_x v.$$

故に

$$\rho(x)(v) = (v)(\alpha_x) \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}$$

となるので o.k.
dim$V = k - 1$ まで o.k. とし, dim$V = k$ のときを示す ($k \geq 2$).

$\mathfrak{g}$ は可解で ρ は準同型写像より $\rho(\mathfrak{g})$ も可解 (各自チェックせよ).
従って, $\rho(\mathfrak{g})$ は可解 Lie alg. で $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}l(V)$.
$\rho(\mathfrak{g}) = \{0\}$ のときは適当に V の基底をとれば成立するので, 以下 $\rho(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$ のときを考える.
仮定より $\forall x \in \mathfrak{g}$ に対して $\rho(x)$ の固有値は全て実数であるので Th.8.1 より

$$\begin{aligned}&\exists \tilde{\mu} : \rho(\mathfrak{g}) \to \mathbf{R} : \text{線型写像}, \exists v_1 \in V - \{0\}\\ &\text{s.t. } \rho(x)v_1 = \tilde{\mu}(\rho(x))v_1 \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

従って, $\mu : \mathfrak{g} \to \mathbf{R}$ を

$$\mu(x) := \tilde{\mu}(\rho(x))$$

とおくと μ も線型写像で

$$\rho(x)v_1 = \mu(x)v_1 \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}$$

となっている.
特に $U = \mathbf{R}v_1$ とおくと

$$\rho(x)u = \mu(x)u \text{ for } \forall u \in U. \tag{13}$$

であり,

$$\mathrm{dim}V/U = n - 1.$$

ここで $\overline{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V/U)$ を

$$\overline{\rho}(x)(\overline{v}) := \overline{\rho(x)v}$$

とおくと $\overline{\rho}$ は (V/U を表現空間とする) 表現となることが容易に確かめられる[27].
ここで行列の三角化を用いると次のことがわかる[28].

$$\begin{aligned}&\exists w_2, w_3, \ldots, w_n \in V, \quad \exists \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}\\ &\text{s.t. } \{v_1, w_2, \ldots, w_n\} : V \text{ の基底},\\ &\rho(x)(v_1, w_2, \ldots, w_n) = (v_1, w_2, \ldots, w_n)\begin{pmatrix} \mu(v_1) & * & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

またこのとき

$$\{\bar{w_2}, \bar{w_3}, \ldots, \bar{w_n}\} : \ V/U \text{ の基底} \tag{14}$$

[27] $\overline{\rho}(x)$ の well defined と $\overline{\rho}(x) \in \mathfrak{g}l(V/U)$ のチェック. さらに, $\overline{\rho}$ が準同型であることを示すとよい

[28] $w_2, w_3, \ldots, w_n \in V$ は x に依存していることに注意

となり, 各 $i \in \{2,3,\ldots,n\}$ に対して

$$\rho(x)w_i = c_1v_1 + c_2w_2 + \ldots + c_iw_i \Rightarrow \bar{\rho}(x)(\bar{w_i}) = c_2\bar{w_2} + \ldots + c_i\bar{w_i} \tag{15}$$

となることも容易にわかる (各自チェックせよ).
よって

$$\bar{\rho}(x)(\bar{w_2},\ldots,\bar{w_n}) = (\bar{w_2},\ldots,\bar{w_n})\begin{pmatrix} \alpha_2 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_3 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となるので, $\bar{\rho}(x)$ の固有値も全て実数である.
従って, 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} &\exists v_2, v_3, \ldots, v_n \in V \\ &\text{s.t.}\{\overline{v_2}, \overline{v_3}, \ldots, \overline{v_n}\} : V/U \text{ の基底}, \\ &\overline{\rho}(x)(\overline{v_2}, \overline{v_3}, \ldots, \overline{v_n}) = (\overline{v_2}, \overline{v_3}, \ldots, \overline{v_n})\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

即ち, $i \in \{2,3,\ldots,n\}$ に対して

$$\begin{aligned} \overline{\rho(x)v_i} = \overline{\rho}(x)(\overline{v_i}) \quad &\in \mathbf{R}\overline{v_2} + \mathbf{R}\overline{v_3} + \cdots + \mathbf{R}\overline{v_i} \\ &= \overline{\mathbf{R}v_2 + \mathbf{R}v_3 + \cdots + \mathbf{R}v_i} \end{aligned}$$

であることより

$$\rho(x)v_i \in \mathbf{R}v_2 + \mathbf{R}v_3 + \cdots + \mathbf{R}v_i + U = \mathbf{R}v_1 + \mathbf{R}v_2 + \cdots + \mathbf{R}v_i.$$

故に

$$\rho(x)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n)\begin{pmatrix} \mu(x) & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{for } \forall x \in \mathfrak{g}.$$

となる.
$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ が V の基底であることも容易に示せるので (各自チェックせよ) 成立が証明された. <u>*q.e.d*</u>

Th. 8.5

$\mathfrak{g}$:$\mathbf{C}$ 上の可解 Lie alg.,

V:$\mathbf{C}$ 上の n 次元ベクトル空間 $(n \geq 1)$,
$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V)$: 表現とする.
このとき

$$\exists\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}: V \text{ の基底}$$

$$\text{s.t. } \rho(x)(v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \text{ for } \forall x \in \mathfrak{g}.$$

$(* \in \mathbf{C})$

問 25

Th.8.5 を証明せよ.

Cor. 8.6

$\mathfrak{g}$: ($\mathbf{R}$ or $\mathbf{C}$ 上の) 有限次元可解 Lie alg.
$\Rightarrow D(\mathfrak{g})$: べき零 Lie alg.

略証:

Def.4.7 より

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(\mathfrak{g}); x \mapsto \mathrm{ad}(x) \quad (\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y])$$

は $\mathfrak{g}$ の表現である. Th.8.5 より $\mathfrak{g}$ の適当な基底をとると任意の $x \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(x)$ の行列表示は

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

の形となる.
特に $\mathrm{ad}([x, y]) = [\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)] = \mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x)$ より $\mathrm{ad}([x, y])$ の行列表示は

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形.
従って,

$$\mathrm{ad}(D(\mathfrak{g})) \subseteq \mathfrak{g}_1(n, \mathbf{C}).$$

$\mathfrak{g}_1(n, \mathbf{R})$ (or $\mathfrak{g}_1(n, \mathbf{C})$) はべき零 Lie algebra であるので ad$(D(\mathfrak{g}))$ もべき零 Lie alg.
さらに ad : $D(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ は準同型で

$$\begin{aligned}\mathrm{Kerad} &= \{x \in D(\mathfrak{g}) \mid \mathrm{ad}(x) = 0\} \\ &= \{x \in D(\mathfrak{g}) \mid \mathrm{ad}(x)(y) = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{x \in D(\mathfrak{g}) \mid [x, y] = 0 \ \forall y \in \mathfrak{g}\} \\ &= D(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{z}{:}\mathfrak{g} \text{ の中心})\end{aligned}$$

となるので準同型定理より

$$D(\mathfrak{g})/(D(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{z}) \simeq \mathrm{ad}(D(\mathfrak{g})).$$

ここで $D(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{z}$ は $D(\mathfrak{g})$ の中心で, (ad$(D(\mathfrak{g}))$ はべき零より) $D(\mathfrak{g})/(D(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{z})$ もべき零.
従って, Th.6.7-(ii) より $D(\mathfrak{g})$ はべき零.
ただし, ここで参照にした Th.6.7 は実 Lie alg. に対して証明したが, 実際は複素 Lie alg. に対しても成立していることに注意.　　$\underline{q.e.d}$