Coxeter 系と Kazhdan-Lusztig 多項式[1]

和歌山大学教育学部　田川 裕之

目 次

1　序　3

1.1　あみだくじ . . . 3

1.2　対称群 . . . 10

2　Coxeter system　13

2.1　Coxeter system . . . 13

2.2　length function . . . 18

2.3　対称群の length function . . . 21

2.4　strong exchange condition . . . 23

3　Bruhat order　27

3.1　poset . . . 27

3.2　Bruhat order . . . 29

3.3　subword property . . . 35

3.4　covering relation . . . 39

3.5　対称群の Bruhat order . . . 42

3.6　parabolic subgroup . . . 46

4　Hecke algebra and R-polynomial　51

4.1　Hecke algebra . . . 51

4.2　R-polynomial . . . 56

[1] 1999 年 8 月 2 日〜5 日に横浜市立大学において大学院生を対象とした集中講義を行うためにまとめたもの. 内容的には [3] と [9] の組合せ論的部分の抜粋± α. Ver.1.02

4.3 conjectures and results 67

5 Kazhdan-Lusztig polynomial **69**

5.1 Kazhdan-Lusztig polynomial 69

5.2 C_w-basis 75

5.3 inverse Kazhdan-Lusztig polynomial 80

5.4 conjecures and results 83

6 Appendix **86**

6.1 対称群の生成系 86

6.2 exchange condition 88

6.3 (C3)' and exchange condition 95

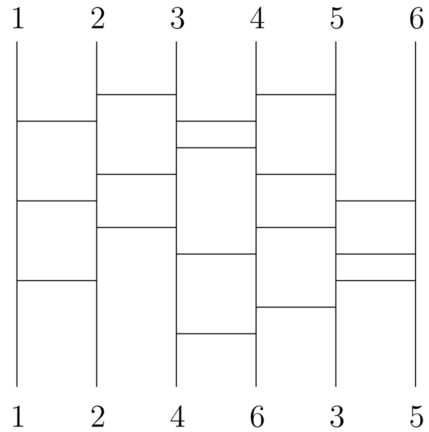
6.4 generic algebra 100

6.5 inductive formula of K-L polynomials 112

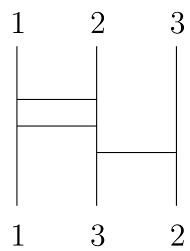
1　序

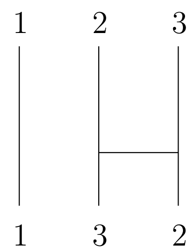
1.1　あみだくじ

Problem 1 次のあみだくじのできるだけ多くの横線を消去して同じ結果となるあみだくじを作れ.



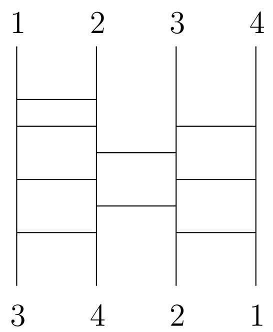
例えば, 次の 2 つは同じ結果となるあみだくじである.



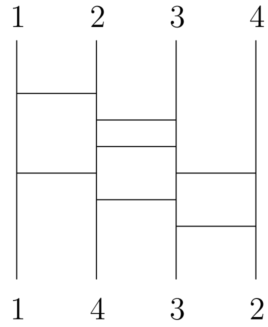


解答を述べるのはあとにして, あみだくじを数学的にとらえることからはじめよう. 以下, 簡単のために縦線が 4 本のあみだくじを取り扱うこととする.

まず, 同じ結果となるあみだくじは同じとみて

$w =$  を　$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

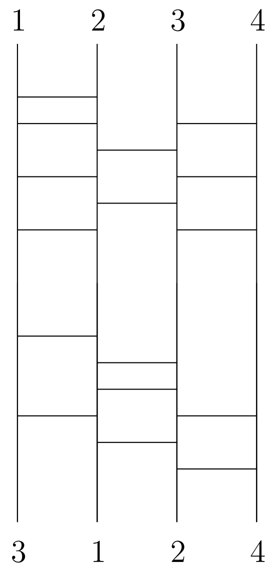
で表すことにする.
従って

$w' =$ 

は　$w' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

とかける.

上に w を, 下に w' をつなげたあみだくじを $w \circ w'$ と書くと

$w \circ w' =$ 

であるので

$$w \circ w' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

とかける.
即ち

$$\text{あみだくじ} \circ \text{あみだくじ} = \text{あみだくじ}$$

になった (即ち縦線４本のあみだくじに演算が定義された).
この演算に関する性質を調べてみよう.

まず, あみだくじ w, w' を

$$
\begin{aligned}
w &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ w(1) & w(2) & w(3) & w(4) \end{pmatrix}, \\
w' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ w'(1) & w'(2) & w'(3) & w'(4) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と書き, $\{1,2,3,4\}$ から $\{1,2,3,4\}$ への全単射と考える.
このとき

$$
w = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ | & | & | & | \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ | & | & | & | \\ w(1) & w(2) & w(3) & w(4) \end{array}
$$

$$
w' = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ | & | & | & | \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ | & | & | & | \\ w'(1) & w'(2) & w'(3) & w'(4) \end{array}
$$

であるので, あみだくじ w' において, i と書かれているところを全て $w(i)$ に書き換えてやると

$$
w = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ | & | & | & | \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ | & | & | & | \\ w(1) & w(2) & w(3) & w(4) \end{array}
$$

$$
w' = \begin{array}{cccc} w(1) & w(2) & w(3) & w(4) \\ | & | & | & | \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ | & | & | & | \\ w(w'(1)) & w(w'(2)) & w(w'(3)) & w(w'(4)) \end{array}
$$

となるので

$$
w \circ w' = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ | & | & | & | \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ | & | & | & | \\ w(w'(1)) & w(w'(2)) & w(w'(3)) & w(w'(4)) \end{array}
$$

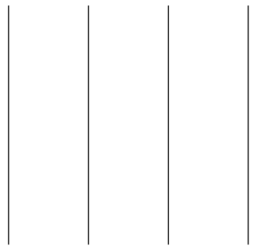
従って, $w \circ w'$ は写像の合成とも考えられる.

さらに次の３つの性質が成り立っている.

(i) あみだくじ w, w', w'' に対して

$$(w \circ w') \circ w'' = w \circ (w' \circ w''). \quad (\text{結合法則の成立})$$

(ii) 特別なあみだくじ e を次で定義する.

$e :=$ 

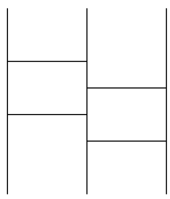
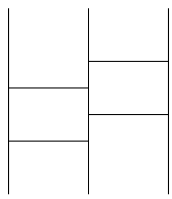
このとき, 任意のあみだくじ w に対して

$$e \circ w = w \circ e = w. \quad (\text{単位元の存在})$$

(iii) あみだくじ w に対して, その上下を逆転させたあみだくじを $\widetilde{w}$ とおくと

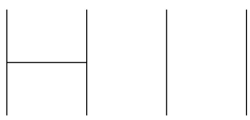
$$w \circ \widetilde{w} = \widetilde{w} \circ w = e. \quad (\text{逆元の存在})$$

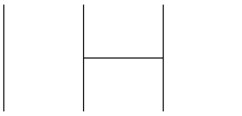
例えば,

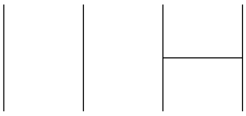
$w =$  $\Rightarrow$ $\widetilde{w} =$ 

この３つの性質 (i.e. 結合法則の成立, 単位元の存在, 逆元の存在) を満たす演算が定義されているとき, その集合は群と呼ばれる.

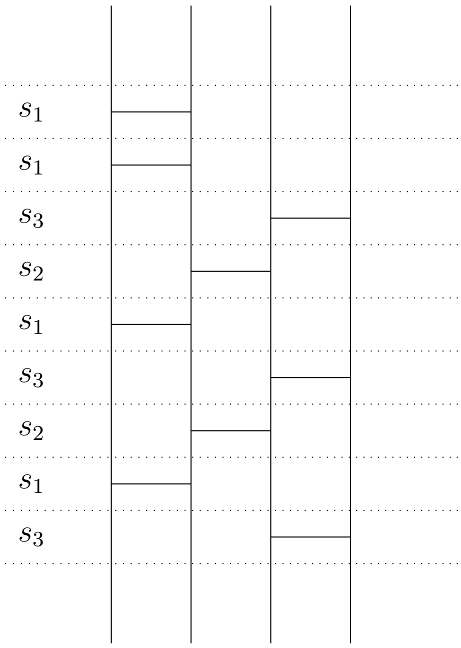
以下 $\circ$ は略してかくこととし, もう少し特別なあみだくじを定義する.

$s_1 :=$ 

$s_2 :=$ 

$s_3 :=$ 

とおく.
このとき任意の縦線４本のあみだくじは s_1, s_2, s_3 を用いて表せる.
例えば, 先に定義した w は次のようにかける



従って

$$w = s_1 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3$$

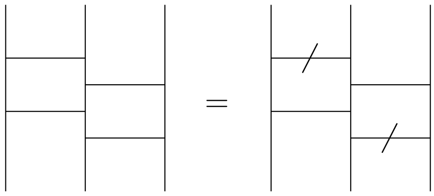
となる.
s_1, s_2, s_3 の間には次の関係式が成立していることがすぐにわかる.

$$s_1 s_1 = s_2 s_2 = s_3 s_3 = e, s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, s_2 s_3 s_2 = s_3 s_2 s_3, s_1 s_3 = s_3 s_1.$$

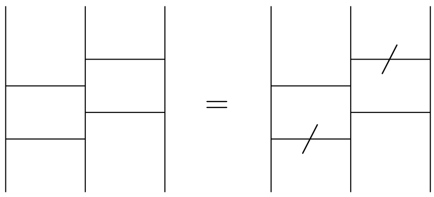
従って

$$s_1 s_2 s_1 s_2 = s_1(s_2 s_1 s_2) = s_1 s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1.$$

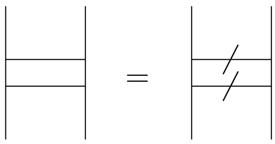
これは次を意味している.



ここで $\not-$ はその横棒をとったことを意味する.
同様に $s_2s_1s_2s_1 = s_1s_2$ であるので



また $s_1s_1 = e$ は次を意味している.



最初に問題としてあげたあみだくじに対してはこれだけの情報で残りが３本になるまで消せるはずである.

一般に次のことが知られている.

Fact 1.1.1 w を縦線が n 本のあみだくじとし,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ w(1) & w(2) & \dots & w(n) \end{pmatrix}$$

とし

$$\mathrm{inv}(w) := \sharp\{(w(i), w(j)); 1 \leq i < j \leq n, w(i) > w(j)\}$$

とおく.
このとき, w の横線は残り $\mathrm{inv}(w)$ 本になるまで消せて, それ以上消せない.
例えば

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ならば $\mathrm{inv}(w) = 7$ であるので結果が右辺となる縦線 6 本のどのようなあみだくじも横線を 7 本になるまで消せてそれ以上消せない.

1.2 対称群

Notation 1.2.1 ここでは, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$, 0 以上の整数全体集合を $\mathbb{N}$, 自然数全体の集合を $\mathbb{P}$ で表す. i.e.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \\
&\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \\
&\mathbb{P} = \{1, 2, \ldots\}.
\end{aligned}$$

また, $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{P}$ に対して

$$\begin{aligned}
[a, b] &:= \{m \in \mathbb{Z}; a \leq m \leq b\}, \\
[n] &:= \{1, 2, \ldots, n\}(= [1, n])
\end{aligned}$$

とおく.

Def. 1.2.2 集合 G に次の (i), (ii), (iii) を満たす演算

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G$$

が与えられているとき, G を群という.

(i) 結合法則
$(xy)z = x(yz)$ for $\forall x, y, z \in G$.

(ii) 単位元の存在
$\exists e \in G$ s.t. $xe = ex = x$ for $\forall x \in G$
(e は G の単位元と呼ばれ, 一意に定まる)

(iii) 逆元の存在
$x \in G$ に対して $\exists y \in G$ s.t. $xy = yx = e$
(y は x の逆元と呼ばれ, 一意に定まり $y = x^{-1}$ と書かれる)

Def. 1.2.3 $n \in \mathbb{P}$ に対して

$$S_n := \{\sigma : [n] \to [n]; \sigma\text{は全単射}\}$$

とおき, S_n の元 σ を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

と書く.
(注意: ここでは $\sigma \in S_n$ の表記のときの上に来る数字の順番は関係ないとする. 例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \sigma(3) \end{pmatrix}$$

である.)
S_n は写像の合成により群となる.
単位元と逆元は次のものである.

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \\ \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(1) \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \sigma^{-1}(3) & \cdots & \sigma^{-1}(1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

S_n を対称群 (symmetric group) と呼び, S_n の元を置換と呼ぶ.
n 本の縦棒を持つあみだくじに演算をいれたものと S_n は同一視できることに注意.

Ex. 1.2.4 (i) $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} S_3 = \{ \ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \}, \end{aligned}$$

(ii) $|S_n| = n!$ for $n \in \mathbb{P}$.

集合 A に対して $|A|$ or $\sharp A$ で A の元の個数を表すものとする.

Def. 1.2.5 G: 群とする.

(i) $H \subseteq G$ に対して H が G の演算で群となっているとき H を G の部分群と呼び, $H \leq G$ で表す.

(ii) $S \subseteq G$ に対して

$$\langle S \rangle := \cap_{H \leq G, S \subseteq H} H$$

とおき, $\langle S \rangle$ を S で生成される G の部分群, S を $\langle S \rangle$ の生成系と呼ぶ.

言い換えると $\langle S \rangle$ は S を含む最小の部分群である.

Prop. 1.2.6 $n \geq 2$, $i \in [n-1]$ に対して

$$\sigma_i := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & i & i+2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$$

とおく (この形の置換は隣接互換と呼ばれる).
このとき $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ は S_n の生成系となることが容易にわかる (cf. Appendix Prop. 6.1.1).

Ex. 1.2.7

$$S_3 = \{\sigma_1^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1 (= \sigma_2\sigma_1\sigma_2)\}.$$

Def. 1.2.8 G: 群, $x \in G$ に対して,

$$\mathrm{ord}(x) := |\langle x \rangle|$$

とおき, x の位数と呼ぶ.

Ex. 1.2.9 $i \in [n-1]$, $\sigma_i \in S_n$ に対して $\mathrm{ord}(\sigma_i) = 2$

2 Coxeter system

2.1 Coxeter system

Def. 2.1.1 (Coxeter system) 次の (C1)-(C3) を満たす pair (W, S) を Coxeter system と呼ぶ.

(C1) $W = \langle S \rangle$ (i.e. W は S で生成される群[2]).
(C2) $e \notin S$, $s^2 = e$ for $\forall s \in S$.
(C3) S の relation は $(st)^{m(s,t)} = e$ $(m(s,t) \in \mathbb{P} \cup \{\infty\})$ の形に限られる. ただし, $m(s,t)$ は st の位数として定義し, $m(s,t) = \infty$ は s と t に全く関係がないことを意味する.

特に (W, S) が Coxeter system のとき W を Coxeter group と呼ぶ.

Rem. 2.1.2 (i) S の関係式が $(st)^{m(s,t)} = e$ の形のみであるということは, もし

$$s_1 s_2 \dots s_r = s'_1 s'_2 \dots s'_t \quad (s_1, \dots, s_r, s'_1, \dots, s'_t \in S)$$

であるならば, 左辺から右辺へ $(st)^{m(s,t)}$ の形 (ただし $m(s,t) \neq \infty$) の関係式のみを何度か用いて変形できるということである.
例えば $S = \{s, t\}$, $s^2 = t^2 = e$, $(st)^3 = e$ のときには

$$stssst = stst = tstt = ts$$

である.
(ii) (W, S) が Coxeter system のとき, $s^2 = e$ for $\forall s \in S$ より $s, t \in S$, $s \neq t$ に対して

$$(st)^m \Leftrightarrow (ts)^m$$

であるので

$$m(s,t) = m(t,s) \geq 2$$

となっている.

Ex. 2.1.3 次は Coxeter system として知られている.

(i) $(S_n, \{\sigma_i; i \in [n-1]\})$ (i.e. 対称群と隣接互換の pair).

[2] i.e. S は W の生成系.

(ii) (Weyl group, simple reflection).
(iii) (2 面体群, $\{s, t; s^2 = t^2 = e, (st)^m = e\}$).

まず次が成立している.

Prop. 2.1.4 Coxeter system の条件 (C1), (C2) を満たす pair (W, S) に対して (C3) は次の (C3)' と同値. 即ち, Coxeter system の定義として, (C1), (C2), (C3)' を満たすものとしてもよい.

(C3)' G:群, f: S から G への次を満たす写像とする.
$\mathrm{ord}(st) \neq \infty$ となる $s, t \in S$ に対して

$$(f(s)f(t))^{\mathrm{ord}(st)} = e_G.$$

このとき $F : W \to G$ を $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$ に対して

$$F(s_1 s_2 \ldots s_r) := f(s_1)f(s_2)\ldots f(s_r)$$

で定義できる (e_G は G の単位元とする).

Proof:
(C3)⇒(C3)'
$s_1, s_2, \ldots, s_m, s_1', s_2', \ldots, s_n' \in S$ に対して

$$s_1 s_2 \ldots s_m = s_1' s_2' \ldots s_n'$$

のときに

$$f(s_1)f(s_2)\ldots f(s_m) = f(s_1')f(s_2')\ldots f(s_n')$$

となることを示すとよい.
Rem. 2.1.2 より $s_1 s_2 \ldots s_m$ は $(st)^{m(s,t)} = e$ の形の関係式を何度が用いて $s_1' s_2' \ldots s_n'$ に用いて変形できる.
従って, 仮定より

$$(st)^{m(s,t)} = e \Rightarrow f(s)f(t)^{m(s,t)} = e_G$$

であるので同様の関係式を用いることにより

$$f(s_1)f(s_2)\ldots f(s_m) = f(s_1')f(s_2')\ldots f(s_n')$$

となる.
従って F は well-defined である.
(C3)'⇒(C3)
W には $(st)^{m(s,t)}$ の形以外の関係式がないことを示す.
この形以外に関係があったとすると

$$\exists s_1, s_2, \ldots, s_r \in S \text{ s.t. } s_1 s_2 \ldots s_r = e$$

であるが, 左辺から右辺へは $(st)^{m(s,t)} = e$ の形の関係式のみを用いて変形できない.
これを用いて矛盾を導く.
S' を S から $(st)^{m(s,t)} = e$ の形以外の関係式を取り去ったものとし (集合としては $S = S'$ である), S' で生成される群を W' とする.
$f : S \to W'$ を

$$f(s) := s \text{ for } s \in S$$

で定義すると, $\mathrm{ord}(st) \neq \infty$ となる $s, t \in S$ に対して

$$(f(s)f(t))^{\mathrm{ord}(s,t)} = (st)^{m(s,t)} = e$$

となるので, (C3)' より $F : W \to W'$ を $s'_1, s'_2, \ldots, s'_k \in S$ に対して

$$F(s'_1 s'_2 \ldots s'_k) := s'_1 s'_2 \ldots s'_k \in W'$$

で定義できる.
従って, $s_1 s_2 \ldots s_r = e$ より

$$s_1 s_2 \ldots s_r = e \text{ in } W'.$$

これは, W' には $(st)^{m(s,t)} = e$ の形以外の関係式がないことに反する. □

以下, 特に断らない限り, (W, S) を Coxeter system とする.

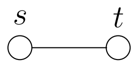
定義より Coxeter system は $m(s,t)$ によって決定されるので, Coxeter graph と呼ばれるものと Coxeter system は 1 対 1 に対応している.

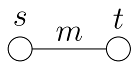
Def. 2.1.5 (Coxeter graph) S の元を頂点とし, 次の条件を満たすグラフを (W, S) の Coxeter graph と呼ぶ[3].

[3] 実際には, 頂点は ∘ で, その上に対応する S の元をかくことが多い.

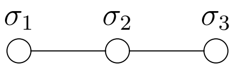
$s, t \in S$ $(s \neq t)$ に対して

$m(s,t) = 2$ $\Leftrightarrow$ 

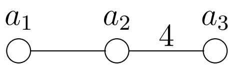
$m(s,t) = 3$ $\Leftrightarrow$ 

$m(s,t) = m \geq 4$ $\Leftrightarrow$ 

Ex. 2.1.6 (i) $(S_4, \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\})$ の Coxeter graph は



(ii) $(B_3, \{a_1, a_2, a_3\})$ (B_3: B_3 型 Weyl 群, $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = e$, $m(a_1, a_2) = 3$, $m(a_2, a_3) = 4$, $m(a_1, a_3) = 2$) の Coxeter graph は



(iii) Coxeter graph と Coxeter system は 1 対 1 に対応しているので, むちゃくちゃに graph を書いて, いくつかの edge の横に 4 以上の自然数や ∞ を記入した graph には Coxeter system が対応している.

Def. 2.1.7 (W, S): Coxeter system に対して

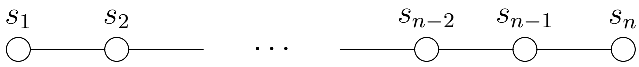
(i) (W, S): irreducible Coxeter system
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Coxeter graph が連結グラフ.

(ii) (W, S): universal Coxeter system
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $m(s,t) = \infty$ for $\forall s, t \in S$ $(s \neq t)$.

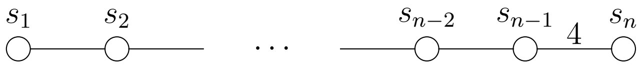
(iii) (W, S): crystallographic Coxeter system
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $m(s,t) \in \{2, 3, 4, 6, \infty\}$ for $\forall s, t \in S$ $(s \neq t)$.

Fact 2.1.8 finite Coxeter system で irreducible なものは次のものに限られる.

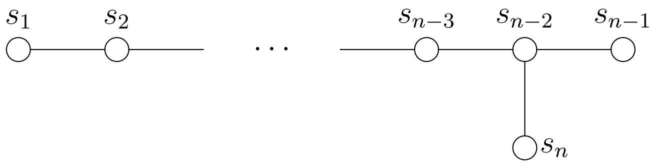
A_n $(n \geq 1)$



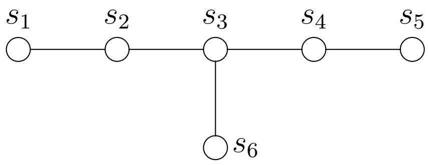
B_n $(n \geq 2)$



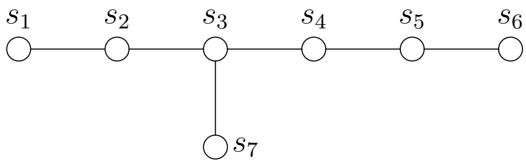
D_n $(n \geq 4)$



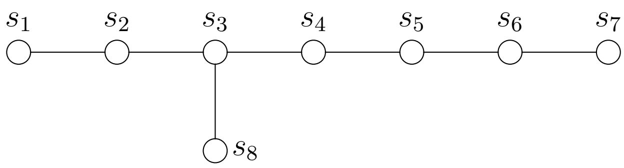
E_6



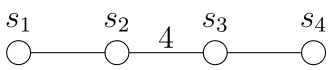
E_7



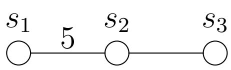
E_8



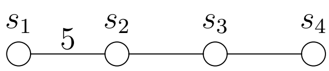
F_4



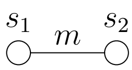
H_3



H_4



$I_2(m)$ $(m \geq 5)$



Rem. 2.1.9 C_n 型 Weyl 群は B_n 型 Weyl 群と群構造として同じであるので, 上記のリストでは C_n 型 Weyl 群は現れていない.

2.2 length function

Def. 2.2.1 (length function) $\ell : W \to \mathbb{N}$ を次で定義する.

$$\ell(w) := \begin{cases} 0 & \text{if } w = e. \\ \min\{r \in \mathbb{P}; \exists s_1, s_2, \ldots, s_r \in S \text{ s.t. } w = s_1 s_2 \ldots s_r\} & \text{if } w \neq e. \end{cases}$$

ℓ は (W, S) の length function (長さ関数) と呼ばれる.
$w \in W$, $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$ に対して

$$s_1 s_2 \ldots s_r : \text{ reduced expression (最短分解)} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ell(s_1 s_2 \ldots s_r) = r,$$
$$s_1 s_2 \ldots s_r : \ w \text{ の reduced expression} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} w = s_1 s_2 \ldots s_r, \ell(w) = r.$$

とする[4] .

Ex. 2.2.2 $(W, S) = (S_3, \{s_1, s_2\})$ のとき

$$s_1 s_2 s_1 : \text{ reduced expression },$$
$$s_1 s_1 s_2 : \text{ not reduced expression } (\because = s_2)$$

Rem. 2.2.3 $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$, $i, j \in [r]$, $i \leq j$ に対して

$$s_1 s_2 \ldots s_r\text{: reduced expression} \Rightarrow s_i s_{i+1} \ldots s_j\text{: reduced expression}$$

length function については次が成立している.

Lem. 2.2.4 $w, w' \in W$, $s \in S$ に対して, 次が成立する.

(i) $\ell(w) = \ell(w^{-1})$.
(ii) $\ell(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S$.
(iii) $\ell(ww') \leq \ell(w) + \ell(w')$.
(iv) $|\ell(w) - \ell(w')| \leq \ell(ww')$.
(v) $\ell(w) - 1 \leq \ell(ws) \leq \ell(w) + 1$,
$\ell(w) - 1 \leq \ell(sw) \leq \ell(w) + 1$.

Proof:
(i) $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$ に対して

$$w = s_1 s_2 \ldots s_r \Leftrightarrow w^{-1} = s_r s_{r-1} \ldots s_2 s_1$$

[4] $s_1 s_2 \ldots s_r$ が w の reduced expression であることを略して “$w = s_1 s_2 \ldots s_r$: reduced expression” とかくこともある.

であるので, length function の定義より成立する[5] .
(ii)

$$\ell(w) = 1 \Leftrightarrow \exists s \in S \text{ s.t.} w = s \Leftrightarrow w \in S.$$

(iii) $s_1 s_2 \dots s_r$ を w の reduced expression, $s'_1 s'_2 \dots s'_k$ を w' の reduced expression とすると

$$ww' = s_1 \dots s_r s'_1 \dots s'_k$$

となるので

$$\ell(ww') \leq r + k = \ell(w) + \ell(w').$$

(iv) (iii) において, w を ww' に, w' を w'^{-1} とおきかえると

$$\ell(ww'w'^{-1}) \leq \ell(ww') + \ell(w'^{-1}).$$

よって (i) より

$$\ell(w) - \ell(w') \leq \ell(ww').$$

他方 (iii) において, w を w^{-1} に, w' を ww' におきかえると

$$\ell(w') - \ell(w) \leq \ell(ww')$$

が得られる.
従って

$$|\ell(w) - \ell(w')| \leq \ell(ww').$$

(v) (iii), (iv) において $w' = s$ とすると

$$|\ell(w) - \ell(s)| \leq \ell(ws) \leq \ell(w) + \ell(s).$$

(ii) より $\ell(s) = 1$ であるので

$$\ell(w) - 1 \leq \ell(ws) \leq \ell(w) + 1.$$

もう 1 つの式は, 上式において $w \to w^{-1}$ とすれば, (i) と $s^{-1} = s$ であることより成立する. □

Prop. 2.2.5 $w \in W$, $s \in S$ に対して

$$\ell(ws) = \ell(w) \pm 1, \quad \ell(sw) = \ell(w) \pm 1.$$

[5] $\forall s \in S$ に対して $ss = e$ であることに注意.

Proof:
$\ell(ws) \in \mathbb{N}$ であるので Lem. 2.2.4-(v) より

$$\ell(ws) = \ell(w) - 1 \text{ or } \ell(w) \text{ or } \ell(w) + 1.$$

従って, $\ell(ws) = \ell(w)$ と仮定し, 矛盾が生じることを示す.
まず, $f : S \to \{1, -1\}$ を

$$f(s) := -1 \text{ for } s \in S$$

で定義すると f は $m(s,t) \neq \infty$ である $s, t \in S$ に対して

$$(f(s)f(t))^{m(s,t)} = 1$$

となっている.
従って, Prop. 2.1.4 より $F : W \to \{1, -1\}$ を $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ に対して

$$F(s_1 s_2 \ldots s_k) := (-1)^k$$

で定義できる.
そこで, $\ell(w) = r$, $w = s_1 s_2 \ldots s_r$ とすると

$$ws = s_1 s_2 \ldots s_r s.$$

他方, 仮定より $\ell(ws) = \ell(w) = r$ であるので

$$\exists s'_1, s'_2, \ldots, s'_r \in S \text{ s.t. } ws = s'_1 s'_2 \ldots s'_r.$$

従って,

$$s_1 s_2 \ldots s_r s = s'_1 s'_2 \ldots s'_r$$

となるので

$$(-1)^{r+1} = F(s_1 s_2 \ldots s_r s) = F(s'_1 s'_2 \ldots s'_r) = (-1)^r.$$

故に $-1 = 1$ となり矛盾.
従って

$$\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$$

である.
$\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$ を示すには, 上式において w を w^{-1} とおき, $\ell(w) = \ell(w^{-1})$ を用いるとよい. □

2.3　対称群の length function

ここでは対称群での長さ関数が転倒数と呼ばれるものと一致することの証明を目的とする.

以下, この節では, $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ とする.

Def. 2.3.1 $\sigma \in S_n$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{Inv}(\sigma) &:= \{(\sigma(i), \sigma(j)); i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\} \\ \mathrm{inv}(\sigma) &:= \sharp \mathrm{Inv}(\sigma) \end{aligned}$$

とおき, $\mathrm{inv}(\sigma)$ を σ の inversion number (転倒数) と呼ぶ[6].

Ex. 2.3.2 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{aligned} \mathrm{Inv}(\sigma) &= \{(5,2),(5,1),(5,4),(5,3),(2,1),(6,1),(6,4),(6,3),(4,3)\}, \\ \mathrm{inv}(\sigma) &= 9. \end{aligned}$$

まず次が成立している.

Lem. 2.3.3 $\sigma \in S_n$, $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して

(i) $\mathrm{inv}(\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma = e$.
(ii) $\mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma^{-1})$
(iii) $\sigma(i) > \sigma(i+1) \Rightarrow \mathrm{Inv}(\sigma\sigma_i) = \mathrm{Inv}(\sigma) - \{(\sigma(i), \sigma(i+1))\}$,
$\sigma(i) < \sigma(i+1) \Rightarrow \mathrm{Inv}(\sigma\sigma_i) = \mathrm{Inv}(\sigma) \cup \{(\sigma(i+1), \sigma(i))\}$.
(iv) $\sigma(i) > \sigma(i+1) \Rightarrow \mathrm{inv}(\sigma\sigma_i) = \mathrm{inv}(\sigma) - 1$,
$\sigma(i) < \sigma(i+1) \Rightarrow \mathrm{inv}(\sigma\sigma_i) = \mathrm{inv}(\sigma) + 1$.

Proof:
全て自明といってもいいのであるが, とりあえず簡単に説明する.
(i) $\mathrm{inv}(\sigma) = 0$ ということは全ての $i < j$ に対して $\sigma(i) < \sigma(j)$ が成立していなくてはいけない. 従って, $\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(n)$ を満たす対称群の元は単位元に限られるので $\mathrm{inv}(\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma = e$ である.

[6] $\mathrm{inv}(\sigma) = \sharp\{(i,j); i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$ とする手法もあるが, もちろんどちらでも同じである.

逆向きは定義通りに計算すればよい.
(ii)

$$\begin{aligned}(\sigma(i),\sigma(j)) \in \mathrm{Inv}(\sigma) \quad &\Leftrightarrow i<j, \sigma(i)>\sigma(j)\\ &\Leftrightarrow \sigma(j)<\sigma(i), j=\sigma^{-1}(\sigma(j))>\sigma^{-1}(\sigma(i))=i\\ &\Leftrightarrow (j,i)\in \mathrm{Inv}(\sigma^{-1})\end{aligned}$$

より成立する.
(iii)

$$\sigma\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i-1) & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \sigma(i+2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

であることに注意すれば後は定義より容易.
(iv) は (iii) より成立. □

Prop. 2.3.4 $\sigma \in S_n$ に対して

$$\ell(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma).$$

Proof:
まず $\ell(\sigma) \leq \mathrm{inv}(\sigma)$ を示す.
そのためには, σ は $\mathrm{inv}(\sigma)$ 個の S の元の積で表せることをいうとよい.
このことを $\mathrm{inv}(\sigma)$ に関する帰納法により示す.
$\mathrm{inv}(\sigma) = 0$ のとき.
$\sigma = e$ であるので o.k.
$\mathrm{inv}(\sigma) = k-1$ まで o.k. とし, $\mathrm{inv}(\sigma) = k$ のときを示す ($k \geq 1$).
$k \geq 1$ より, $\sigma \neq e$ であるので

$$\exists i \in [n-1] \text{ s.t. } \sigma(i) > \sigma(i+1).$$

従って Lem. 2.3.3-(iv) より

$$\mathrm{inv}(\sigma\sigma_i) = \mathrm{inv}(\sigma) - 1.$$

よって, 帰納法の仮定より

$$\exists s_1, s_2, \dots, s_{k-1} \in S \text{ s.t. } \sigma\sigma_i = s_1 s_2 \dots s_{k-1}.$$

従って, 両辺の右から σ_i をかけると

$$\sigma = s_1 s_2 \dots s_{k-1}\sigma_i$$

となり, σ が k 個の S の元の積で表されることが示された.
故に

$$\ell(\sigma) \leq \mathrm{inv}(\sigma). \tag{1}$$

次に $\mathrm{inv}(\sigma) \leq \ell(\sigma)$ を示す.

$$\ell(\sigma) = k, \sigma = s_1 s_2 \dots s_k \quad (s_1, s_2, \dots, s_k \in S)$$

とする.
Lem. 2.3.3-(iv) より, $w \in S_n$, $s \in S$ に対して

$$\mathrm{inv}(ws) = \mathrm{inv}(w) \pm 1$$

であるので

$$\begin{aligned} \mathrm{inv}(\sigma) &= \mathrm{inv}(s_1 s_2 \dots s_k) \\ &= \mathrm{inv}(s_1 s_2 \dots s_{k-1}) \pm 1 \\ &= \mathrm{inv}(s_1 s_2 \dots s_{k-2}) \pm 1 \pm 1 \\ &= \dots \\ &= \mathrm{inv}(e) \pm 1 \pm 1 \dots \pm 1 \\ &= 0 \pm 1 \pm 1 \dots \pm 1 \\ &\leq k \\ &= \ell(\sigma) \end{aligned}$$

従って,

$$\mathrm{inv}(\sigma) \leq \ell(\sigma). \tag{2}$$

よって (1), (2) より

$$\mathrm{inv}(\sigma) = \ell(\sigma)$$

が成立する. □

Problem 2 次の等式の成立を示せ.

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{\ell(\sigma)} = \Pi_{i=1}^{n} (1 + q + q^2 + \dots + q^{i-1}).$$

2.4 strong exchange condition

ここでは次を示すことを目的とする.

Th. 2.4.1 (strong exchange condition)

$$T := \{wsw^{-1}; w \in W, s \in S\}$$

とおき, $t \in T$, $w = s_1 s_2 \cdots s_k \in W$ $(s_1, s_2, \ldots, s_k \in S)$ に対して

$$\ell(tw) \leq \ell(w) \Rightarrow \exists j \in [k] \text{ s.t. } ts_1 s_2 \cdots s_{j-1} = s_1 s_2 \cdots s_j.$$

(i.e. $\ell(tw) \leq \ell(w) \Rightarrow \exists j \in [k]$ s.t. $tw = s_1 s_2 \cdots \widehat{s_j} \cdots s_k$. ただし, ここでの $\widehat{s_j}$ は s_j を取り除くことを意味する記号である)
注: $\ell(w) = k$ とは限らない.

Rem. 2.4.2 $t \in T$ に対して $t^{-1} = t$ であることに注意.

この定理の証明の前に, 次の定理 (上の定理の $t \in S$ の場合) を示すことからはじめる.

Th. 2.4.3 (exchange condition) $s \in S$, $w = s_1 s_2 \cdots s_k \in W$ $(s_1, s_2, \ldots, s_k \in S)$ に対して

$$\ell(sw) \leq \ell(w) \Rightarrow \exists j \in [k] \text{ s.t. } ss_1 s_2 \cdots s_{j-1} = s_1 s_2 \cdots s_j.$$

(i.e. $\ell(sw) \leq \ell(w) \Rightarrow \exists j \in [k]$ s.t. $sw = s_1 s_2 \cdots \widehat{s_j} \cdots s_k$.)
注: $\ell(w) = k$ とは限らない.

とはいったものの, 実際のところ, exchange condition の証明はややこしくてえらく大変なので, Appendix において行うこととする.

exchange condition を用いると strong exchange condition は次のように証明できる.

Proof of Th. 2.4.1:
$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$T_n := \{wsw^{-1}; s \in S, w \in W, \ell(w) = n\}$$

とおくと $T = \cup_{n=0}^{\infty} T_n$ であるので n に関する帰納法により示す[7].
$n = 0$ のときは $T_0 = S$ であるので Th. 2.4.3 により成立.

[7] $n \neq m \Rightarrow T_n \cap T_m = \phi$ とは限らない. 例えば, $s = sss \in T_0 \cap T_1$.

$n-1$ まで o.k. とし, n のときを示す ($n \geq 1$).
$t \in T_n$ とする.
$t \in T_0$ のときには既に成立しているので, 以下 $t \notin T_0$ と仮定してよい.
$sts \in T_{n-1}$ となる $s \in S$ を 1 つとり固定する.
2 つの場合に分けて考える.
Case 1. $\ell(stw) \leq \ell(sw)$ のとき
$sts \in T_{n-1}$, $\ell((sts)sw) = \ell(stw) \leq \ell(sw)$ であるので帰納法の仮定より ($sw = ss_1 s_2 \ldots s_k$ に注意)

$$(sts)sw = w \text{ or } ss_1 s_2 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_k \text{ for some } i \in [k]$$

である.

$$(sts)sw = w \Rightarrow stw = w \Rightarrow s = t \Rightarrow t \in T_0$$

となり矛盾.
よって

$$\begin{aligned}(sts)sw &= ss_1 s_2 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_k \\ tw &= s_1 s_2 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_k.\end{aligned}$$

即ち

$$ts_1 s_2 \cdots s_{i-1} = s_1 s_2 \cdots s_i$$

となり成立.
Case 2. $\ell(stw) > \ell(sw)$ のとき
$\ell((sts)stw) = \ell(sw) < \ell(stw)$ であるので, $s'_1 s'_2 \ldots s'_p$ を tw の reduced expression とすると, 帰納法の仮定より

$$(sts)stw = tw \text{ or } ss'_1 s'_2 \cdots \widehat{s'_i} \cdots s'_p \text{ for some } i \in [p]$$

である.

$$(sts)stw = tw \Rightarrow sw = tw \Rightarrow s = t \Rightarrow t \in T_0$$

となり矛盾.
他方

$$\begin{aligned}(sts)stw = ss'_1 s'_2 \cdots \widehat{s'_i} \cdots s'_p \quad &\Rightarrow w = s'_1 s'_2 \cdots \widehat{s'_i} \cdots s'_p \\ &\Rightarrow \ell(w) \leq p - 1 < p = \ell(tw)\end{aligned}$$

となり仮定 ($\ell(tw) \leq \ell(w)$) に反するので, この場合はあり得ない.
従って, 帰納法により成立が証明された. □

strong exchange condition では $t \in T$ を左から掛けたが, 右から掛けても同じことがいえる (逆元で考えて後でもどすとよい). 即ち, 次も成立している.

Cor. 2.4.4 $t \in T$, $w = s_1 s_2 \cdots s_k \in W$ $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ に対して

$$\ell(wt) \leq \ell(w) \Rightarrow \exists j \in [k] \text{ s.t. } wt = s_1 s_2 \cdots \widehat{s_j} \cdots s_k.$$

実は次のことが知られている (cf. Appendix Th. 6.3.1).

Th. 2.4.5 (C3)' と exchange condition は同値である.
i.e. (C1), (C2) を満たす pair (W, S) に対して

(W, S) が (C3)' を満たす $\Leftrightarrow$ (W, S) が exchange condition を満たす.

Ex. 2.4.6 $(S_n, \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\})$ は exchange condition を満たしているので Coxeter system である.
なぜならば $\sigma \in S_n$, $i \in [n-1]$ に対して

$$\ell(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma),$$
$$\ell(\sigma\sigma_i) \leq \ell(\sigma) \Leftrightarrow \sigma(i) > \sigma(i+1)$$

であることに注意して, あみだくじを使って考えるとよい ($\sigma(i) > \sigma(i+1)$ となっているあみだくじの $\sigma(i)$ の経路と $\sigma(i+1)$ の経路は同じ横棒を少なくとも一つ通過している！).

3 Bruhat order

3.1 poset

Def. 3.1.1 (poset) P: 集合とする. P の間の関係 $\leq$ が次の (P1)-(P3) を満たすとき $\leq$ を P の順序関係 or 順序 (order) と呼び, 順序関係が定義された集合 P を順序集合 (partially ordered set (略して poset)) と呼ぶ.

$$\begin{array}{ll} \text{(P1)} & x \leq x \text{ for } \forall x \in P. \\ \text{(P2)} & x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y. \\ \text{(P3)} & x \leq y, y \leq w \Rightarrow x \leq w. \end{array}$$

順序関係を強調するときには $(P, \leq)$ と書くこともある.
また, 記号として

$$\begin{aligned} & x < w \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \leq w, x \neq w, \\ & x \lessdot w \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x < w,\ \text{“}x \leq y \leq w \Rightarrow y = x \text{ or } y = w\text{”} \end{aligned}$$

とおき, そうでないときには

$$x \nleq w,\ x \nless w, x \not\lessdot w$$

といったように否定の意味を込めて $/$ を記号の上からかく.
$x \lessdot w$ のとき x は w に cover される or w は x を cover するという.

Ex. 3.1.2 $n \in \mathbb{P}$ とする.

(i) $[n]$ での通常の大小関係は順序関係であり, $a, b \in [n]$ に対して

$$a \lessdot b \Leftrightarrow b = a + 1.$$

(ii) $[n]$ に関係 $\leq_i$ を

$$a \leq b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} a|b (\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } b = ca)$$

で定義すると, この関係は順序関係で, $a, b \in [n]$ に対して

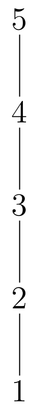
$$a \lessdot b \Leftrightarrow a|b,\ \frac{b}{a}\text{: 素数}.$$

(iii) A: 集合, $2^A := \{B; B \subseteq A\}$ (A の部分集合全体の集合) とする. 2^A での包含関係は順序関係であり, $B, C \in 2^A$ に対して

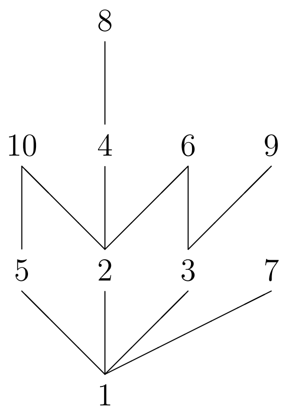
$$B \lessdot C \Leftrightarrow B \subseteq C,\ |C - B| = 1.$$

Def. 3.1.3 (Hasse diagram) $(P, \leq)$: 順序集合とする.
P の元を頂点とするグラフで, $a \lessdot b$ のときに, a と b を線分で結び, b を a よりも上に書いたものを $(P, \leq)$ に対する Hasse diagram と呼ぶ.

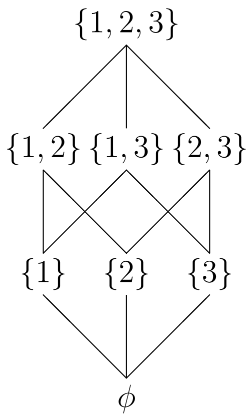
Ex. 3.1.4 (i) $([5], \leq)$ の Hasse diagram は次のもの



(ii) $([10], \leq_i)$ の Hasse diagram は次のもの.



(iii) $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ の Hasse diagram は次のもの



Def. 3.1.5 $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$: 順序集合とする．次を満たす全単射 $f : P \to Q$ が存在するとき P と Q は(順序集合として)同型であるといい, $P \simeq Q$ で表す.

$$x \leq_P w \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(w).$$

同型であるということと, グラフとして同じ形の Hasse diagram がかけるということは同値である.

3.2 Bruhat order

Def. 3.2.1 (Bruhat order) $x, w \in W$ に対して

$$x <' w \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists t \in T \text{ s.t. } x = tw, \ell(x) < \ell(w)$$

で表すこととし, Bruhat order $\leq$ を次で定義する.

$$x \leq w \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{l} x = w \\ \text{or} \\ \exists x_0, x_1, \ldots, x_r \in W \text{ s.t. } x = x_0 <' x_1 <' \ldots <' x_r = w. \end{array}$$

Rem. 3.2.2 $t \in T$ に対して

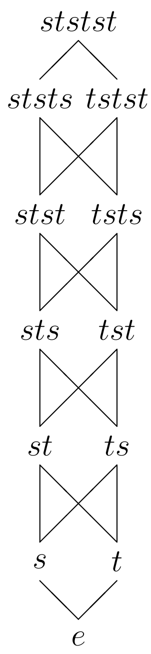
$$tw = w(w^{-1}tw), wt = (wtw^{-1})w, w^{-1}tw, wtw^{-1} \in T$$

より

$$x <' w \Leftrightarrow \exists t \in T \text{ s.t. } x = wt, \ell(x) < \ell(w)$$

である.

Ex. 3.2.3 $(I_2(6), \{s,t\})$ の Bruhat order での Hasse diagram は次のもの



一般に $x, w \in I_2(m)$ に対して

$$\ell(x) < \ell(w) \Leftrightarrow x < w$$

の成立が容易にわかる.

Lem. 3.2.4 $x, w \in W$ に対して

$$x \leq w \Leftrightarrow x^{-1} \leq w^{-1}.$$

Proof:
$x <' w \Rightarrow x^{-1} <' w^{-1}$ のみを示すとよい.
$<'$ の定義と Rem. 3.2.2 より

$$\begin{aligned} x <' w \Rightarrow\ & \exists t \in T \text{ s.t. } x = tw, \ell(x) < \ell(w) \\ \Rightarrow\ & x^{-1} = w^{-1}t, \ell(x^{-1}) = \ell(x) < \ell(w) = \ell(w^{-1}) \\ \Rightarrow\ & x^{-1} <' w^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

次は定義より容易.

Lem. 3.2.5 $w \in W$, $s \in S$ に対して

$$\begin{aligned}\ell(sw) < \ell(w) &\Leftrightarrow sw < w,\\ \ell(w) < \ell(sw) &\Leftrightarrow w < sw,\\ \ell(ws) < \ell(w) &\Leftrightarrow ws < w,\\ \ell(w) < \ell(ws) &\Leftrightarrow w < ws.\end{aligned}$$

Proof:
まず

$$\ell(sw) < \ell(w) \Leftrightarrow sw < w \tag{3}$$

を示す.
$\Rightarrow$) は Bruhat order の定義より成立.
$\Leftarrow$) を示す.
Bruhat order の定義より

$$\begin{aligned} sw < w \Rightarrow\ & \exists x_0, x_1, \ldots, x_r \in W \\ & \text{s.t. } sw = x_0 <' x_1 <' \ldots <' x_r = w, \\ & \ell(sw) = \ell(x_0) < \ell(x_1) < \ldots < \ell(x_r) = \ell(w) \end{aligned}$$

となり成立している.

$$\ell(w) < \ell(sw) \Leftrightarrow w < sw \tag{4}$$

は (3) において $w = sw$ とおくとよい.
残りは (3), (4) と Lem. 3.2.4 より成立する. □

Prop. 3.2.6 W: finite Coxeter group に対して次が成立する.

(i) W の最長元はただ一つ (w_0 とおく).
(ii) $w_0^{-1} = w_0$.
(iii) $x \in W$ に対して

$$\exists y \in W \text{ s.t. } w_0 = yx, \ell(w_0) = \ell(y) + \ell(x).$$

(iv) $x \in W$ に対して

$$\exists z \in W \text{ s.t. } w_0 = xz, \ell(w_0) = \ell(x) + \ell(z).$$

(v) w_0 は Bruhat order での最大元である.

１つだけ補題を示す.

Lem. 3.2.7 $w = s'_1 s'_2 \ldots s'_r s_1 s_2 \ldots s_k$: reduced expression, $s \in S$, $s_1 s_2 \ldots s_k s$: reduced expression に対して

$$\ell(ws) < \ell(w) \Rightarrow \exists i \in [r] \text{ s.t. } w = s'_1 s'_2 \ldots \widehat{s'_i} \ldots s'_r s_1 s_2 \ldots s_k s.$$

Proof:
exchange condition より

$$\begin{aligned}&\exists i \in [r] \text{ s.t. } ws = s'_1 s'_2 \ldots \widehat{s'_i} \ldots s'_r s_1 s_2 \ldots s_k \\ &\text{or} \\ &\exists i \in [k] \text{ s.t. } ws = s'_1 s'_2 \ldots s'_r s_1 s_2 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k.\end{aligned}$$

もし, $ws = s'_1 s'_2 \ldots s'_r s_1 s_2 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k$ ならば

$$w = s'_1 s'_2 \ldots s'_r s_1 s_2 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k s = s'_1 s'_2 \ldots s'_r s_1 s_2 \ldots s_k.$$

となり,

$$s_1 s_2 \ldots \widehat{s_i} \ldots s_k = s_1 s_2 \ldots s_k s.$$

これは $s_1 s_2 \ldots s_k s$ が reduced expression であることに反する. □

Proof of Prop. 3.2.6:
(i) W は finite Coxeter group より, 最長元が存在することはよい.
w, w' を W の最長元とし, $s_1 s_2 \ldots s_r$, $s'_1 s'_2 \ldots s'_r$ をそれぞれ w, w' の reduced expression とする.
$s'_1 s'_2 \ldots s'_r$ は最長の長さをもつので

$$\ell(s'_1 s'_2 \ldots s'_r s_1) < \ell(s'_1 s'_2 \ldots s'_r).$$

よって, exchange condition より

$$\exists i_1^{(1)} \in [r] \text{ s.t. } s'_1 s'_2 \ldots s'_r = s'_1 s'_2 \ldots \widehat{s'_{i_1^{(1)}}} \ldots s'_r s_1.$$

特に右辺も reduced expression であることに注意する[8] .
同様に,

$$\ell(s'_1 s'_2 \ldots \widehat{s'_{i_1^{(1)}}} \ldots s'_r s_1 s_2) < \ell(s'_1 s'_2 \ldots \widehat{s'_{i_1^{(1)}}} \ldots s'_r s_1)$$

[8] reduced expression でないと $\ell(w) = r$ に矛盾する.

であるので, Lem. 3.2.7 より

$$\exists i_1^{(2)}, i_2^{(2)} \in [r] \text{ s.t. } i_1^{(2)} < i_2^{(2)},$$
$$s'_1 s'_2 \ldots \widehat{s'_{i_1^{(1)}}} \ldots s'_r s_1 = s'_1 s'_2 \ldots \widehat{s'_{i_1^{(2)}}} \ldots \widehat{s'_{i_2^{(2)}}} \ldots s'_r s_1 s_2$$

(実際は $i_1^{(1)} \in \{i_1^{(2)}, i_2^{(2)}\}$).
以下, この作業を繰り返すと

$$s'_1 s'_2 \ldots s'_r = s_1 s_2 \ldots s_r$$

となるので, 最長元の一意性が証明された.
(ii) $\ell(w_0) = \ell(w_0^{-1})$ であるので, 最長元の一意性より $w_0 = w_0^{-1}$.
(iii) $s'_1 s'_2 \ldots s'_r$, $s_1 s_2 \ldots s_k$ をそれぞれ w_0, x の reduced expression として, (i) の証明と同様に考えると

$$\exists i_1, i_2, \ldots, i_k \text{ s.t. } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq r,$$
$$s'_1 s'_2 \ldots s'_r = s'_1 \ldots \widehat{s'_{i_1}} \ldots \widehat{s'_{i_2}} \ldots \widehat{s'_{i_k}} \ldots s'_r s_1 s_2 \ldots s_k.$$

従って

$$y := s'_1 \ldots \widehat{s'_{i_1}} \ldots \widehat{s'_{i_2}} \ldots \widehat{s'_{i_k}} \ldots s'_r$$

とおくと

$$w_0 = yx, \ \ell(w_0) = \ell(y) + \ell(x).$$

(iv) (iii) より

$$\exists z^{-1} \in W \text{ s.t. } w_0 = z^{-1} x^{-1}, \ell(w_0) = \ell(z^{-1}) + \ell(x^{-1}).$$

$w_0 = w_0^{-1}$, $\ell(z^{-1}) = \ell(z)$, $\ell(x^{-1}) = \ell(x)$ であるので

$$w_0 = (z^{-1} x^{-1})^{-1} = xz, \ \ell(w_0) = \ell(z) + \ell(x).$$

(v) $\ell(x) < \ell(w_0)$ となる $x \in W$ に対して $x < w_0$ を示すとよい. (iii) より

$$\exists y \in W \text{ s.t. } w_0 = yx, \ell(w_0) = \ell(y) + \ell(x)$$

であるので, $s'_a s'_{a-1} \ldots s'_1$, $s_1 s_2 \ldots s_k$ をそれぞれ y, x の reduced expression とすると $s'_a s'_{a-1} \ldots s'_2 s'_1 s_1 s_2 \ldots s_k$ は w_0 の reduced expression となっている ($a \geq 1$ に注意).
よって

$$x <' s'_1 x <' s'_2 s'_1 x <' \ldots <' s'_a \ldots s'_2 s'_1 x = w_0$$

となるので

$$x \leq w_0$$

が成立する. □

Cor. 3.2.8 W: finite Coxeter group とする. $w \in W$ に対して

$$\ell(w_0 w) = \ell(w w_0) = \ell(w_0) - \ell(w).$$

Proof:
$w_0 = (w_0 w) w^{-1}$ であるので Prop. 3.2.6-(iii) より

$$\ell(w_0 w) = \ell(w_0) - \ell(w^{-1}) = \ell(w_0) - \ell(w).$$

同様に $w_0 = w^{-1}(w w_0)$ であるので Prop. 3.2.6-(iv) より

$$\ell(w w_0) = \ell(w_0) - \ell(w). \quad \square$$

Cor. 3.2.9 W: finite Coxeter group とする.
$x, w \in W$ に対して次は同値

(i) $x \leq w$.
(ii) $w w_0 \leq x w_0$.
(iii) $w_0 w \leq w_0 x$.
(iv) $w_0 x w_0 \leq w_0 w w_0$.

Proof:
(i)⇒(ii) をまず示す.
Cor. 3.2.8 より

$$\begin{aligned} x <' w \Rightarrow\ & \exists t \in T \text{ s.t. } x = tw, \ell(x) < \ell(w) \\ \Rightarrow\ & w w_0 = t x w_0, \\ & \ell(w w_0) = \ell(w_0) - \ell(w) < \ell(w_0) - \ell(x) = \ell(x w_0) \\ \Rightarrow\ & w w_0 <' x w_0 \end{aligned}$$

となるので (i)⇒(ii) が成立する.
(ii)⇒(i) は $w_0^2 = e$ と (i)⇒(ii) より成立.
従って (i)⇔(ii) である.
次に (i)⇒(iii)⇒(iv) を示す

$$\begin{aligned} x <' w \ & \Rightarrow x^{-1} <' w^{-1} \quad (\because \text{Lem. 3.2.4}) \\ & \Rightarrow w^{-1} w_0 <' x^{-1} w_0 \quad (\because \text{(i)}\Rightarrow\text{(ii)}) \\ & \Rightarrow w_0 w <' w_0 x \quad (\because \text{Lem. 3.2.4}, w_0^2 = e) \\ & \Rightarrow w_0 x w_0 <' w_0 w w_0 \quad (\because \text{(i)}\Rightarrow\text{(ii)}) \end{aligned}$$

よって (i)⇒(iii)⇒(iv) が成立.
$w_0^2 = e$ と (i)⇒(iv) を用いると (iv)⇒(i) の成立も示されるので, 結論として

$$\text{(i)}\Leftrightarrow\text{(ii)}\Leftrightarrow\text{(iii)}\Leftrightarrow\text{(iv)}$$

が成立する. □

Cor. 3.2.10 finite Coxeter group W の Bruhat order での Hasse diagram は上下を逆転しても同じ形である. 厳密にいうと

$$\exists f : W \to W, \text{ s.t. } f\text{: bijection, ``}x \le y \Leftrightarrow f(y) \le f(x)\text{''}$$

である.
この性質をもつ poset は self-dual (自己双対) と呼ばれる.

Proof:
Cor. 3.2.9 より, 例えば f として $f(x) := xw_0$ とおくとよい. □

Problem 3 W: finite Coxeter group に対して

$$\text{``}x \le w \Leftrightarrow wz \le xz\text{'' for } \forall x, w \in W$$

となる z は w_0 に限られるか？
正しいならば証明を間違っているならば反例を挙げて説明せよ.

3.3 subword property

ここでは次の subword property と呼ばれる定理の証明を目的とする.

Th. 3.3.1 (subword property) $x, w \in W$ $(w \ne e)$ とし, $s_1 s_2 \cdots s_r$ を w の reduced expression とする. このとき次は同値.

(i) $x \le w$.
(ii) $\exists i_1, i_2, \cdots, i_m$ s.t. $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le r$, $x = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$.

subword property の証明の前に補題を一つ示す.

Lem. 3.3.2 $x, w \in W$, $s \in S$ に対して,

$$x \le w \Rightarrow sx \le w \text{ or } sx \le sw.$$

Proof:

$x = w \Rightarrow sx = sw$ となり o.k.

$x < w \Rightarrow sx \leq w$ or $sx \leq sw$ を示す.

そのためには $x <' w \Rightarrow sx \leq w$ or $sx \leq sw$ を示すとよい.

($\because$ もし示せたとすると

$$\begin{aligned} x < w \Rightarrow \ & \exists x_0, x_1, \cdots, x_r \in W \text{ s.t. } x = x_0 <' x_1 <' \ldots <' x_r = w \\ \Rightarrow \ & \exists i \in [r] \text{ s.t. } sx_0 \leq sx_1 \leq \ldots \leq sx_{i-1} \leq x_i \\ & \text{or } sx_0 \leq sx_1 \leq \ldots \leq sx_r \\ \Rightarrow \ & sx \leq w \text{ or } sx \leq sw. \quad) \end{aligned}$$

$x <' w$ より

$$\exists t \in T \text{ s.t. } x = tw, \ \ell(tw) < \ell(w).$$

Case 1. $\ell(sx) < \ell(x)$ のとき.

このときは $sx < x$ であるので

$$sx < x <' w.$$

即ち $sx \leq w$ となり成立.

Case 2. $\ell(sx) > \ell(x)$ のとき.

$s = t$ であれば $sx = tx = w$ となり o.k.

$s \neq t$ のときを考える.

まず, $x = tw$ より

$$sx = (sts)sw, sts \in T$$

であるので $\ell(sx) < \ell(sw)$ が示せるとよい ($sx <' sw$ となり o.k.).

$\ell(sw) \leq \ell(sx)$ と仮定すると

$$\ell((sts)sx) = \ell(sw) \leq \ell(sx).$$

ここで $s_1 s_2 \cdots s_a$ を x の reduced expression とすると

$\ell(sx) > \ell(x)$ より $ss_1 s_2 \cdots s_a$ は sx の reduced expression.

よって, strong exchange condition より

$$(sts)sx = x \text{ or } \exists i \in [a] \text{ s.t. } (sts)sx = ss_1 s_2 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_a.$$

$(sts)sx = x$ ならば $s = t$ となり $s \neq t$ の仮定に反する.

他方 $(sts)sx = ss_1 s_2 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_a$ ならば

$$tx = s_1 s_2 \cdots \widehat{s_i} \cdots s_a$$

となり
$$\ell(tx) \le a-1 < \ell(x).$$
これは, $tx = w$ より $\ell(w) < \ell(x)$ となり $x <' w$ に矛盾.
よって,
$$\ell(sx) < \ell(sw)$$
となり o.k. □

Proof of Th. 3.3.1:
(i) $\Rightarrow$ (ii)
$x = w$ のときには $(i_1, i_2, \ldots, i_r) = (1, 2, \ldots, r)$ とするとよい.
$x < w$ のときは Bruhat order の定義より
$$\begin{aligned}&\exists t_1, t_2, \cdots, t_m \in T\\ &\text{s.t. } x = t_m t_{m-1} \cdots t_1 w <' t_{m-1} \ldots t_1 w <' \ldots <' t_1 w <' w.\end{aligned}$$
$\ell(t_1 w) < \ell(w)$, $t_1 \in T$ であるので strong exchange condition より,
$$\exists i_1^{(1)} \in [r] \text{ s.t. } t_1 w = s_1 s_2 \cdots \widehat{s_{i_1^{(1)}}} \cdots s_r.$$
$\ell(t_2(t_1 w)) < \ell(t_1 w)$, $t_1 w = s_1 s_2 \cdots \widehat{s_{i_1^{(1)}}} \cdots s_r$ であるので
$$\exists i_1^{(2)}, i_2^{(2)} \in [r] \text{ s.t. } i_1^{(1)} \in \{i_1^{(2)}, i_2^{(2)}\}, t_2 t_1 w = s_1 s_2 \cdots \widehat{s_{i_1^{(2)}}} \cdots \widehat{s_{i_2^{(2)}}} \cdots s_r.$$
以下, この作業を繰り返すことにより
$$\begin{aligned}&\exists i_1, i_2, \cdots, i_k \ (k = r - m)\\ &\text{s.t. } 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le r, x = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}\end{aligned}$$
となることがわかる.
(ii) $\Rightarrow$ (i) $r = \ell(w)$ に関する帰納法により示す.
$r = 1$ のとき.
$w = s_1$, $x = e$ or s_1 より o.k.
$r - 1$ まで o.k. とし, r のときを示す $(r \ge 2)$.
Case 1. $i_1 > 1$ のとき.
$s_1 s_2 \cdots s_r$: reduced expression より $s_2 s_3 \cdots s_r$ も reduced expression であるので帰納法の仮定より
$$s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \le s_2 s_3 \cdots s_r <' w$$

となり成立.
Case 2. $i_1 = 1$ (i.e. $s_{i_1} = s_1$) のとき.
帰納法の仮定より

$$s_{i_2} \cdots s_{i_m} \leq s_2 s_3 \cdots s_r.$$

よって Lem. 3.3.2 より

$$s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \leq s_2 s_3 \cdots s_r <' w \text{ or } s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m} \leq s_1 s_2 s_3 \cdots s_r = w$$

となり成立.
従って, 帰納法により subword property が示された. □

Cor. 3.3.3 $x, w \in W$, $x \leq w$, $w = s_1 s_2 \ldots s_r$: reduced expression のとき

$$\begin{aligned} &\exists i_1, i_2, \ldots i_k \text{ s.t. } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq r, \\ &x = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_k}: \text{ reduced expression.} \end{aligned}$$

Proof:
subword property より

$$\exists i_1, i_2, \ldots i_h \text{ s.t. } 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_h \leq r,\ x = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_h}.$$

s_{i_1} の右から順に s_{i_2}, s_{i_3}, … と掛けていき, reduced expression でなくなるところでは, exchange condition を用いて, それ以前のところからある s_{i_j} を取り除いて reduced expression にしていくと考えると

$$\begin{aligned} &\exists j_1, j_2, \ldots j_k \text{ s.t. } 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq h, \\ &x = s_{i_{j_1}} s_{i_{j_2}} \ldots s_{i_{j_k}}: \text{ reduced expression.} \quad \square \end{aligned}$$

次のようなことも成立している.

Prop. 3.3.4 $x, w \in W$, $s \in S$, $sw < w$ とする.

(i) $sx < x$ のとき

$$x \leq w \Leftrightarrow sx \leq w \Leftrightarrow sx \leq sw.$$

(ii) $x < sx$ のとき

$$x \leq w \Leftrightarrow sx \leq w \Leftrightarrow x \leq sw.$$

Proof:
$s_2 s_3 \dots s_r$ を sw の reduced expression とする.
$sw < w$ より $ss_2 \dots s_r$ は w の reduced expression であることに注意.
(i) $x \leq w \Rightarrow sx \leq w$ は $sx < x$ より成立.
$sx \leq w \Rightarrow sx \leq sw$ を示す.
$sx \leq w$ であるので $s_1 = s$ とおくと Cor. 3.3.3 より

$$\begin{aligned} &\exists i_1, i_2, \dots, i_k \text{ s.t. } 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r, \\ &sx = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}\text{: reduced expression} \end{aligned}$$

$i_1 = 1$ のときは

$$x = s_{i_2} \dots s_{i_k}\text{: reduced expression}$$

となり $sx < x$ に反する.
$i_1 > 1$ のときには

$$sx \leq s_2 s_3 \dots s_r = sw$$

となり成立.
次に $sx \leq sw \Rightarrow x \leq w$ を示す.
仮定と subword property より

$$\exists j_1, j_2, \dots, j_h \text{ s.t. } 2 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_h \leq r, sx = s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_h}.$$

従って

$$x = ss_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_h} \leq ss_2 s_3 \dots s_r = w$$

となり成立.
(ii) (i) において x を sx におきかえると成立する. □

Problem 4 $a, b \in W$ に対して $a \leq z_{a,b}$ かつ $b \leq z_{a,b}$ となる $z_{a,b} \in W$ は必ず存在するか？
正しいならば証明を間違っているならば反例を挙げて説明せよ.

3.4 covering relation

Notation 3.4.1 $x, w \in W$ に対して

$$x \lessdot w \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x < w, \ell(w) = \ell(x) + 1$$

とおく.

Prop. 3.4.2 $x, w \in W$, $x < w$, $\ell(w) - \ell(x) = r$ のとき

$$\exists x_0, x_1, \ldots, x_r \in W$$
$$\text{s.t. } x = x_0 \lhd x_1 \lhd \ldots \lhd x_r = w.$$

この命題の証明の前に, 補題を一つ示す.

Lem. 3.4.3 $x, w \in W$, $s \in S$, $x \lhd w$, $x < sx$, $sx \neq w$ のとき

$$w < sw, sx < sw.$$

Proof:
$\ell(sx) = \ell(x) + 1 = \ell(w)$ に注意する.
Lem. 3.3.2 より

$$sx \leq w \text{ or } sx \leq sw.$$

$sx \leq w$ ならば $\ell(sx) = \ell(w)$ より

$$sx = w$$

となり仮定に反するので

$$sx \leq sw$$

が成立している.
ここで, もし $\ell(sw) < \ell(w)$ ならば $\ell(sx) = \ell(w)$ より

$$\ell(sw) < \ell(sx)$$

となり $sx \leq sw$ であることに矛盾.
よって $\ell(sw) > \ell(w)$ となるので

$$w < sw$$

が成立.
従って, $\ell(sx) = \ell(w) < \ell(sw)$, $sx \leq sw$ より

$$sx < sw$$

も成立. □

Proof of Prop. 3.4.2:
$\ell(x) + \ell(w)$ に関する帰納法により示す.

$\ell(x)+\ell(w)=1$ のときは $x=e$, $w=s\in S$ であるので o.k.
$\ell(x)+\ell(w)=k-1$ まで o.k. とし, $\ell(x)+\ell(w)=k$ のときを示す $(k\geq 2)$.
$x<w$ より

$$\exists s\in S \text{ s.t. } sw<w.$$

Case 1. $x\leq sw$ のとき.
$x=sw$ のときには $x=sw\lhd w$ となっているので o.k.
$x<sw$ のときは $\ell(x)+\ell(sw)=k-1$ であるので帰納法の仮定と $sw\lhd w$ より $\ell(sw)-\ell(x)=h$ とすると

$$\begin{aligned}&\exists x_0,x_1,\ldots,x_h\in W\\ &\text{s.t. } x=x_0\lhd x_1\lhd\ldots\lhd x_h=sw\lhd w\end{aligned}$$

となり成立.
Case 2. $x\not\leq sw$ のとき.
まず $sw<w$ より

$$\begin{aligned}&\exists s_2,s_3,\ldots,s_t\in S\\ &\text{s.t. } w=ss_2s_3\ldots s_t\text{: reduced expression.}\end{aligned}$$

$x<w=ss_1s_2\ldots s_t$, $x\not\leq sw=s_2s_3\ldots s_t$ であるので Cor. 3.3.3 より

$$\begin{aligned}&\exists i_1,i_2,\ldots,i_u\\ &\text{s.t. } 2\leq i_1<i_2<\ldots<i_u\leq t, x=ss_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_u}\text{: reduced expression}\end{aligned}$$

従って $sx\lhd x$ である.
よって $sx<x<w$, $\ell(sx)+\ell(w)=k-1$ であるので帰納法の仮定より $\ell(w)-\ell(sx)=m$ とすると

$$\begin{aligned}&\exists y_0,y_1,\ldots,y_m\in W\\ &\text{s.t. } sx=y_0\lhd y_1\lhd\ldots\lhd y_m=w.\end{aligned}$$

ここで $sy_0=x$ より

$$\ell(y_0)<\ell(sy_0).$$

$sw<w$ より

$$\ell(sy_m)<\ell(y_m)$$

であるので

$$i:=\min\{i\in[m];\ell(sy_i)<\ell(y_i)\}$$

とおくと

$$y_{i-1}\lhd y_i, y_{i-1}\lhd sy_{i-1}, sy_i\lhd y_i$$

となっているので, Lem. 3.4.3 より

$$sy_{i-1} = y_i$$

である ($\because$ $sy_{i-1} \neq y_i$ ならば Lem. 3.4.3 より $y_i < sy_i$ となる).
従って

$$x = sy_0 \lhd sy_1 \lhd \ldots \lhd sy_{i-1} = y_i \lhd y_{i+1} \lhd y_m = w$$

となり成立. $\square$

Cor. 3.4.4 $x, w \in W$, $x < w$ に対して

$$x \lessdot w \Leftrightarrow x \lhd w.$$

Proof:
$x < w$ に対して

$$\begin{aligned} x \lessdot w \quad &\Leftrightarrow x < z < w \text{ となる } z \in W \text{ は存在しない} \\ &\Leftrightarrow x < w, \ell(w) - \ell(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow x \lhd w. \quad \square \end{aligned}$$

3.5 対称群の Bruhat order

Prop. 3.5.1 $\sigma \in S_n$, $1 \leq i < j \leq n$, $\sigma(i) > \sigma(j)$ に対して

$$u(\sigma; i, j) := \sharp\{k \in [i, j]; \sigma(i) > \sigma(k) > \sigma(j)\}$$

とおく.
次が成立している

(i) $(T =)\{w\sigma_i w^{-1}; i \in [n-1], w \in S_n\} = \{(i, j); 1 \leq i < j \leq n\}$.
ここで (i, j) は

$$(i,j)(k) = \begin{cases} i & \text{if } k = j \\ j & \text{if } k = i \\ k & \text{if } k \neq i, j \end{cases}$$

で定義される S_n の元である.

(ii) $\sigma \in S_n$, $i < j$ に対して $\sigma(i) > \sigma(j)$ のとき

$$\ell(\sigma(i, j)) = \ell(\sigma) - 2u(\sigma; i, j) - 1.$$

(iii) $\sigma, \tau \in S_n$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma \lessdot \tau \Leftrightarrow \ & \exists i, j \text{ s.t. } i < j, \tau(i) > \tau(j) \\ & \sigma = \tau(i,j), u(\tau; i, j) = 0\end{aligned}$$

Proof:
(i)

$$\begin{aligned}& ws_iw^{-1}(w(i)) = w(i+1), ws_iw^{-1}(w(i+1)) = w(i), \\ & ws_iw^{-1}(w(k)) = w(k) \text{ for } k \in [n] - \{i, i+1\}\end{aligned}$$

であるので

$$ws_iw^{-1} = (w(i), w(i+1)).$$

逆に, $i < j$ に対して $w(i) = i$, $w(i+1) = j$ となる $w \in S_n$ を一つとると [9],

$$ws_iw^{-1} = (i, j)$$

となるので (i) が成立する.
(ii) $j - i$ に関する帰納法で示す.
$j - i = 1$ のとき.
$j = i + 1$, $\sigma(i) > \sigma(j) = \sigma(i+1)$, $u(\sigma; i, i+1) = 0$ であるので Lem. 2.3.3-(iv), Prop. 2.3.4 より

$$\begin{aligned}\ell(\sigma(i,j)) &= \ell(\sigma\sigma_i) \\ &= \ell(\sigma) - 1 \\ &= \ell(\sigma) - 2u(\sigma; i, j) - 1\end{aligned}$$

となり成立.
$j - i = k - 1$ まで成立していると仮定し $j - i = k$ のときを示す ($k \geq 2$).

$$\delta(*) := \begin{cases} 1 & \text{if } *\text{: true,} \\ 0 & \text{if } *\text{: false} \end{cases}$$

とおくと Lem. 2.3.3-(iv), Prop. 2.3.4 より $w \in S_n$, $r \in [n-1]$ に対して

$$\ell(w\sigma_r) = \ell(w) - 1 + 2\delta(w(r) < w(r+1)).$$

とかける.
さらに

$$\sigma\sigma_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j-1 & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \sigma(j-1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

[9] 例えば $j = i+1$ のときは $w = e$, $j \neq i+1$ のときには $w = (i+1, j)$ とおくとよい.

より

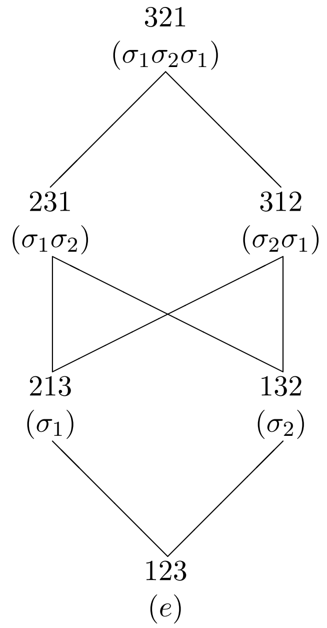
$$u(\sigma\sigma_{j-1}; i, j-1) = u(\sigma; i, j) - \delta(\sigma(i) > \sigma(j-1) > \sigma(j))$$

である.
従って $(i,j) = \sigma_{j-1}(i, j-1)\sigma_{j-1}$ であるので帰納法の仮定より

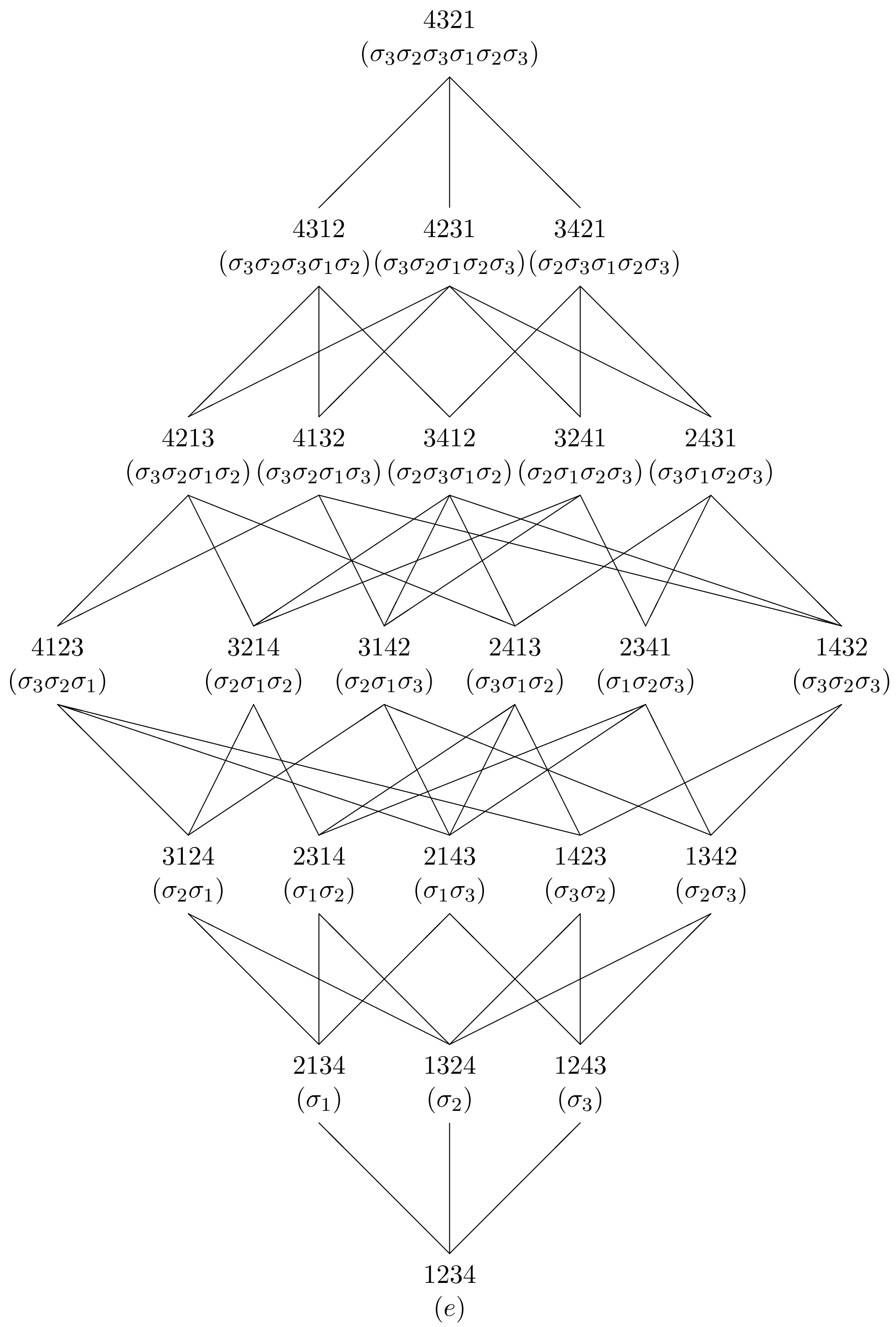
$$\begin{aligned}
&\ell(\sigma(i,j)) \\
&= \ell(\sigma\sigma_{j-1}(i,j-1)\sigma_{j-1}) \\
&= \ell(\sigma\sigma_{j-1}(i,j-1)) - 1 + 2\delta(\sigma\sigma_{j-1}(i,j-1)(j-1) < \sigma\sigma_{j-1}(i,j-1)(j)) \\
&= \ell(\sigma\sigma_{j-1}(i,j-1)) - 1 + 2\delta(\sigma(i) < \sigma(j-1)) \\
&= \ell(\sigma\sigma_{j-1}) - 2u(\sigma\sigma_{j-1}; i, j-1) - 1 - 1 + 2\delta(\sigma(i) < \sigma(j-1)) \\
&= \ell(\sigma\sigma_{j-1}) - 2u(\sigma; i, j) + 2\delta(\sigma(i) > \sigma(j-1) > \sigma(j)) \\
&\quad -2 + 2\delta(\sigma(i) < \sigma(j-1)) \\
&= \ell(\sigma) - 1 + 2\delta(\sigma(j-1) < \sigma(j)) - 2u(\sigma; i, j) + 2\delta(\sigma(i) > \sigma(j-1) > \sigma(j)) \\
&\quad -2 + 2\delta(\sigma(i) < \sigma(j-1)) \\
&= \ell(\sigma) - 2u(\sigma; i, j) - 1
\end{aligned}$$

従って帰納法により証明された.
(iii) (i), (ii) と Bruhat order の定義, $\lessdot$ の定義より成立する. □

Ex. 3.5.2 Prop. 3.5.1-(iii) を用いて S_3 の Bruhat order での Hasse diagram を書くと次のようになる (ただし abc といった表記で, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ を表し, その下の括弧の中は reduced expression の一つとする).



S_4 の Bruhat order での Hasse diagram は次のものである.



3.6 parabolic subgroup

Def. 3.6.1 $J \subseteq S$ に対して

$$W_J := \langle J \rangle \text{ (i.e. } J \text{ で生成される } W \text{ の部分群)},$$
$$W^J := \{x \in W; \ell(xy) = \ell(x) + \ell(y) \text{ for } \forall y \in W_J\}$$

とおく.
W_J は W の parabolic subgroup と呼ばれる.

Ex. 3.6.2 $W = S_3$, $J = \{\sigma_1\}$ のとき

$$W_J = \{e, \sigma_1\},\ W^J = \{e, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\}.$$

Prop. 3.6.3 $J \subseteq S$ に対して次が成立.

$$W^J = \{x \in W; \ell(xs) = \ell(x) + 1 \text{ for } \forall s \in J\}.$$

Proof:
$W(J) := \{x \in W; \ell(xs) = \ell(x) + 1 \text{ for } \forall s \in J\}$ とおき $W^J = W(J)$ を示す.
$J \subseteq W_J$ であるので

$$W^J \subseteq W(J)$$

は成立している.
逆 (i.e. $W(J) \subseteq W^J$) を示す.

$$\exists x \in W(J) \text{ s.t. } x \notin W^J$$

と仮定し, 矛盾を導く.
$x \notin W^J$ より

$$\exists y \in W_J \text{ s.t. } \ell(xy) \neq \ell(x) + \ell(y).$$

従って $s_1s_2\ldots s_r$, $s'_1s'_2\ldots s'_k$ をそれぞれ x, y の reduced expression とすると

$$\exists i \in [k-1] \text{ s.t.}$$
$$s_1s_2\ldots s_r s'_1 s'_2 \ldots s'_i : \text{ reduced expression},$$
$$s_1s_2\ldots s_r s'_1 s'_2 \ldots s'_i s'_{i+1} : \text{reduced expression でない}.$$

($x \in W(J)$ より $s_1 s_2 \dots s_r s_1'$: reduced expression である).
従って Lem. 3.2.7 より

$$\exists j \in [r] \text{ s.t. } s_1 s_2 \dots s_r s_1' s_2' \dots s_i' = s_1 s_2 \dots \widehat{s_j} \dots s_r s_1' s_2' \dots s_i' s_{i+1}'. \tag{5}$$

ここで subword property より

$$x \leq s_1 s_2 \dots s_r s_1' s_2' \dots s_i'$$

であるので, (5), $\ell(x) = r$, Cor. 3.3.3 より

$$\begin{aligned}
&\exists a_1, a_2, \dots, a_u, b_1, b_2, \dots, b_v \\
&\text{s.t. } 1 \leq a_1 < \dots < a_u \leq r,\ 1 \leq b_1 < \dots < b_v \leq i+1, \\
&a_d \neq j \text{ for } \forall d \in [u], u + v = r,\ v \geq 1, \\
&x = s_{a_1} s_{a_2} \dots s_{a_u} s_{b_1}' \dots s_{b_v}' \text{: reduced expression.}
\end{aligned}$$

このとき

$$\ell(x s_{b_v}') = \ell(x) - 1,\ s_{b_v}' \in J$$

となるので $x \in W(J)$ に矛盾.
従って $W^J = W(J)$ が成立する. □

以下 $J \subseteq S$ とする.

Th. 3.6.4 $w \in W$ に対して

$$^{\exists!}x \in W^J, {}^{\exists!}y \in W_J \text{ s.t. } w = xy.$$

ここでの記号 ∃! は「一意的に存在する」を表す記号である.

Proof:
存在は $wW_J = \{wz; z \in W_J\} \in W/W_J$ の中で長さが最小のものを x とし, $y = x^{-1}w$ とおけばよい.
もちろん, $\ell(w)$ の帰納法による証明もできるのでやってみよう.
$\ell(w) = 0$ (i.e. $w = e$) のときには $x = y = e$ とおけばよい.
$\ell(w) = k - 1$ まで存在が示されたと仮定し $\ell(w) = k$ のときの存在を示す ($k \geq 1$).
Case 1. $w \in W^J$ のとき.
$x := w$, $y := e$ とおくとよい.

Case 2. $w \notin W^J$ のとき.
Prop. 3.6.3 より

$$\exists s \in J \text{ s.t. } \ell(ws) = \ell(w) - 1.$$

ここで帰納法の仮定より

$$\exists x' \in W^J, \exists y' \in W_J \text{ s.t. } ws = x'y'$$

であり, $s \in J$ より $y's \in W_J$ となっているので $x := x'$, $y := y's$ とおくと

$$x \in W^J,\ y \in W_J, xy = w$$

となる.
従って帰納法により存在は証明された.
次に一意性を証明する.

$$\begin{aligned}
&w = xy = x'y',\ x, x' \in W^J, y, y' \in W_J,\\
&\ell(w) = r,\ \ell(x) = a,\ \ell(x') = b,\ \ell(y) = r - a,\ \ell(y') = r - b,\\
&x = s_1 s_2 \dots s_a,\ y = s_{a+1} s_{a+2} \dots s_r,\\
&x' = s'_1 s'_2 \dots s'_b,\ y' = s'_{b+1} s'_{r+2} \dots s'_r
\end{aligned}$$

とする.
このとき

$$s_1 s_2 \dots s_a s_{a+1} \dots s_r = s'_1 s'_2 \dots s'_b s'_{b+1} \dots s'_r\text{: reduced expression}$$

であるので $a > b$ ならば Cor. 3.3.3 より

$$\begin{aligned}
&\exists i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_h \text{ s.t. } k + h = a,\ h \geq 1,\\
&1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq b,\ b + 1 \leq j_1 < \dots < j_h \leq r, x = s'_{i_1} \dots s'_{i_k} s'_{j_1} \dots s'_{j_h}.
\end{aligned}$$

これは $s'_{j_h} \in J$ より $x \in W^J$ に矛盾.
$a < b$ のときも同様に矛盾が生じるので $a = b$ である.
従って

$$s_1 s_2 \dots s_a s_{a+1} \dots s_r = s'_1 s'_2 \dots s'_a s'_{a+1} \dots s'_r$$

であるので exchange condition より

$$\begin{aligned}
&\exists i \in [a] \text{ s.t. } s_1 s_2 \dots s_a s_{a+1} \dots s_r = s_1 s_2 \dots \widehat{s_i} \dots s_a s_{a+1} \dots s_r s'_r\\
&\text{or}\\
&\exists j \in [a+1, r] \text{ s.t. } s_1 s_2 \dots s_a s_{a+1} \dots s_r = s_1 s_2 \dots s_a s_{a+1} \dots \widehat{s_j} \dots s_r s'_r
\end{aligned}$$

最初の場合は先と同様に考えることにより $x \in W^J$ に矛盾.
従って

$$s_1 s_2 \dots s_a s_{a+1} \dots \widehat{s_j} \dots s_r = s'_1 s'_2 \dots s'_a s'_{a+1} \dots \dots s'_{r-1}.$$

以下同様に考えることにより

$$x = s_1 s_2 \dots s_a = s'_1 s'_2 \dots s'_a = x'$$

が成立する.
よってこのとき $y = y'$ ともなるので一意性が示された. □

Th. 3.6.4 を用いると次の成立が証明できる.

Prop. 3.6.5 $x \in W$ に対して

$$\begin{aligned} &G(w) := \{s \in S; s \le w\}, \\ &C(w) := \{x \in W; x \lessdot w\}, \\ &g(w) := \sharp G(w), \\ &c(w) := \sharp C(w) \end{aligned}$$

とおくと

$$c(w) \ge g(w).$$

Proof:
$g(w)$ に関する帰納法により示す.

$$c(e) = 0 = g(e), \quad c(s) = 1 = g(s) \quad (s \in S)$$

であるので $g(w) \ge 1$ に対しては成立している.
$g(w) = k-1$ まで成立したと仮定し $g(w) = k$ のときを示す $(k \ge 2)$.
$w = s_1 s_2 \dots s_r$: reduced expression とすると $g(w) = k$ より

$$\exists i \in [r] \text{ s.t. } g(s_{i+1} s_{i+2} \dots s_r) = k-1,\ g(s_i s_{i+1} \dots s_r) = k.$$

従って $J := G(s_{i+1} s_{i+2} \dots s_r)$ とおくと Th. 3.6.4 より

$$\exists x \in W^J,\ \exists y \in W_J \text{ s.t. } s_1 s_2 \dots s_i = xy.$$

このとき $s_{i+1} s_{i+2} \dots s_r \in W_J$ より

$$y s_{i+1} s_{i+2} \dots s_r \in W_J,\ g(y s_{i+1} s_{i+2} \dots s_r) = k-1.$$

ここで $x \in W^J$ より

$$z \in C(ys_{i+1}s_{i+2}\ldots s_r) \Rightarrow xz \in C(w)$$

であり, また, $x \neq e$ より $s \in S$, $sx < x$ とすると $sx \in W^J$ でもあるので

$$sw = (sx)(ys_{i+1}s_{i+2}\ldots s_r) \in C(w).$$

さらに $sw = xz$ となる $z \in C(ys_{i+1}s_{i+2}\ldots s_r)$ が存在したとすると $x \in W^J$ に反するので

$$c(w) \geq c(ys_{i+1}s_{i+2}\ldots s_r) + 1.$$

従って $c(ys_{i+1}s_{i+2}\ldots s_r) = k - 1$ であるので帰納法の仮定より

$$c(w) \geq k - 1 + 1 = k = g(x)$$

となり成立. □

4 Hecke algebra and R-polynomial

4.1 Hecke algebra

Def.-Prop. 4.1.1 (Hecke algebra) (W, S): Coxeter system,
q: parameter に対して

$$\mathcal{H}(W) := \{T_w; w \in W\} \text{ を基底としてもつ自由 } \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]\text{-加群}$$

とおく[10] .

i.e. $\mathcal{H}(W)$ は次を満たす $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$ の作用[11] が定義された加群で, 集合としては

$$\mathcal{H}(W) = \{\sum_{w \in W} a_w T_w \text{ (有限和)}; a_w \in \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \text{ for } w \in W\}$$

である.

$$a(x+y) = ax + ay, (a+b)x = ax + bx, (ab)x = a(bx), 1x = x$$
for $a, b \in \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$, $x, y \in \mathcal{H}(W)$.

$\mathcal{H}(W)$ には, 次を満たす結合的 $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$-代数の構造が一意的に入る.
$w \in W$, $s \in S$ に対して

$$T_e T_w = T_w T_e = T_w, \tag{6}$$

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{if } \ell(w) < \ell(sw), \\ qT_{sw} + (q-1)T_w & \text{if } \ell(w) > \ell(sw). \end{cases} \tag{7}$$

i.e. $\mathcal{H}(W)$ には上の条件を満たす積が一意的に定義され, 次を満たしている.

$$(x+y)z = xz + yz, x(y+z) = xy + xz,$$
$$(ax)y = x(ay) = a(xy), (xy)z = x(yz)$$
for $x, y, z \in \mathcal{H}(W)$, $a \in \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$.

[10] $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] = \{\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i q^{\frac{i}{2}} \text{(有限和)}; a_i \in \mathbb{Z} \text{ for } i \in \mathbb{Z}\}$: 1 をもつ環.
[11] i.e. $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \times \mathcal{H}(W)$ から $\mathcal{H}(W)$ への写像. ここでは単に ax ($a \in \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$, $x \in \mathcal{H}(W)$) で表す.

$\mathcal{H}(W)$ を W の Hecke algebra もしくは Iwahori-Hecke algebra と呼ぶ[12] .

Proof:
存在と一意性は generic algebra の理論により保証されている (cf. Appendix Th. 6.4.2). □

満たすべき条件 (7) に関しては, 例えば, 次のように言い換えることができる.

Prop. 4.1.2 (7) は次の (8) or (9), と置き換えてもよい.

$$T_w T_s = \begin{cases} T_{ws} & \text{if } \ell(w) < \ell(ws), \\ qT_{ws} + (q-1)T_w & \text{if } \ell(w) > \ell(ws). \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &T_s T_w = T_{sw} \text{ if } \ell(w) < \ell(sw), \\ &T_s^2 = qT_s + (q-1)T_e. \end{aligned} \tag{9}$$

Proof:
この成立も generic algebra の理論により保証されている (cf. Appendix Prop. 6.4.10). □

Lem. 4.1.3 $T_s \in \mathcal{H}(W)$ $(s \in S)$ は可逆で

$$T_s^{-1} = q^{-1}T_s + (q^{-1} - 1)T_e.$$

従って, 特に $\forall w \in W$ に対して T_w は可逆である.

Proof:
$T_s = T_s T_e$ より

$$\begin{aligned} T_s(q^{-1}T_s + (q^{-1}-1)T_e) &= q^{-1}T_s^2 + (q^{-1}-1)T_s T_e \\ &= q^{-1}T_s^2 + (q^{-1}-1)T_s \\ &= q^{-1}(qT_e + (q-1)T_s) + (q^{-1}-1)T_s \\ &= T_e + (1-q^{-1})T_s + (q^{-1}-1)T_s \\ &= T_e. \end{aligned}$$

[12] $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-加群として Hecke algebra を定義する手法もあるが, ここでは, 後の議論の混乱を避けるために $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$-加群として定義する.

他方, $T_sT_e = T_eT_s$ より

$$\begin{aligned} T_s(q^{-1}T_s + (q^{-1}-1)T_e) &= q^{-1}T_s^2 + (q^{-1}-1)T_sT_e \\ &= q^{-1}T_s^2 + (q^{-1}-1)T_eT_s \\ &= (q^{-1}T_s + (q^{-1}-1)T_e)T_s. \end{aligned}$$

従って

$$T_s(q^{-1}T_s + (q^{-1}-1)T_e) = (q^{-1}T_s + (q^{-1}-1)T_e)T_s = T_e$$

となるので

$$T_s^{-1} = q^{-1}T_s + (q^{-1}-1)T_e.$$

次に T_w が可逆であることを示す.
Case 1. $w = e$ のとき.
このときは (6) より

$$T_eT_e = T_eT_e = T_e$$

となるので[13] T_w は可逆である.
Case 2. $w \neq e$ のとき.
$\ell(w) > 0$ であるので $s_1s_2\ldots s_r$ を w の reduced expression とすると

$$T_w = T_{s_1}T_{s_2}\ldots T_{s_r}.$$

従って

$$T_w^{-1} = T_{s_r}^{-1}T_{s_{r-1}}^{-1}\ldots T_{s_1}^{-1}.$$

よって T_w は可逆である. □

$\mathcal{H}(W)$ に bar operation と呼ばれるものを定義する.

Def. 4.1.4 $P(q) \in \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$, $w \in W$ に対して

$$\overline{P(q)} := P(q^{-1}), \quad \overline{T_w} := T_{w^{-1}}^{-1}$$

とおき, $\sum_{w \in W} b_wT_w \in H(W)$ に対して

$$\overline{\sum_{w \in W} b_wT_w} := \sum_{w \in W} \overline{b_w}\ \overline{T_w}$$

で定義する.

[13] i.e. $T_e^{-1} = T_e$

まず, 次が成立している.

Prop. 4.1.5 (i) $\overline{XY} = \overline{X}\ \overline{Y}$ for $X, Y \in \mathcal{H}(W)$.
(ii) $\overline{\overline{X}} = X$ for $X \in \mathcal{H}(W)$.

Proof:
$P(q), Q(q) \in \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$ に対して

$$\overline{P(q)Q(q)} = \overline{P(q)}\ \overline{Q(q)}, \quad \overline{\overline{P(q)}} = P(q)$$

となることは定義より容易にわかる.
(i) まず $x, w \in W$ に対して

$$\overline{T_x T_w} = \overline{T_x}\ \overline{T_w}$$

を示す.
$\ell(x)$ に関する帰納法で示す.
$\ell(x) = 0$ (i.e. $x = e$) のときは $\overline{T_e} = T_e^{-1} = T_e$ より

$$\overline{T_e T_w} = \overline{T_w} = T_e \overline{T_w} = \overline{T_e}\ \overline{T_w}$$

となり成立.
$\ell(x) = 1$ (i.e. $x = s \in S$) のとき.
Case 1. $w < sw$ のとき.

$$\begin{aligned}
\overline{T_s T_w} &= \overline{T_{sw}} \\
&= T_{(sw)^{-1}}^{-1} \\
&= (T_{w^{-1}s})^{-1} \\
&= (T_{w^{-1}} T_s)^{-1} \\
&= T_s^{-1} T_{w^{-1}}^{-1} \\
&= \overline{T_s}\ \overline{T_w}.
\end{aligned}$$

Case 2. $sw < w$ のとき.

$$\begin{aligned}
\overline{T_s T_w} &= \overline{q T_{sw} + (q-1) T_w} \\
&= q^{-1} \overline{T_{sw}} + (q^{-1} - 1) \overline{T_w} \\
&= q^{-1} T_{w^{-1}s}^{-1} + (q^{-1} - 1) \overline{T_w} \\
&= q^{-1} (T_{w^{-1}s} T_s T_s^{-1})^{-1} + (q^{-1} - 1) \overline{T_w} \\
&= q^{-1} (T_{w^{-1}} T_s^{-1})^{-1} + (q^{-1} - 1) \overline{T_w} \\
&= q^{-1} T_s \overline{T_w} + (q^{-1} - 1) \overline{T_w} \\
&= (q^{-1} T_s + (q^{-1} - 1) T_e) \overline{T_w} \\
&= \overline{T_s}\ \overline{T_w}.
\end{aligned}$$

よって, どちらの場合にも成立.
$\ell(x)=k-1$ まで成立したと仮定し $\ell(x)=k$ のときを示す $(k\geq 2)$.
$\ell(x)\geq 2$ より

$$\exists s\in S \text{ s.t. } sx<x.$$

従って $T_{sx}T_w=\sum_{y\in W} g_yT_y$ とすると

$$\begin{aligned}
\overline{T_xT_w} &= \overline{T_sT_{sx}T_w}\\
&= \overline{T_s\textstyle\sum_{y\in W} g_yT_y}\\
&= \overline{\textstyle\sum_{y\in W} g_yT_sT_y}\\
&= \textstyle\sum_{y\in W} \overline{g_y}\,\overline{T_sT_y}\\
&= \textstyle\sum_{y\in W} \overline{g_y}\,\overline{T_s}\ \overline{T_y} \quad (\because \text{帰納法の仮定})\\
&= \overline{T_s}\textstyle\sum_{y\in W} \overline{g_y}\,\overline{T_y}\\
&= \overline{T_s}\ \overline{\textstyle\sum_{y\in W} g_yT_y}\\
&= \overline{T_s}\ \overline{T_{sx}T_w}\\
&= \overline{T_s}\ \overline{T_{sx}}\ \overline{T_w} \quad (\because \text{帰納法の仮定})\\
&= \overline{T_sT_{sx}}\ \overline{T_w} \quad (\because \text{帰納法の仮定})\\
&= \overline{T_x}\ \overline{T_w}.
\end{aligned}$$

よって $x,w\in W$ に対して

$$\overline{T_xT_w}=\overline{T_x}\ \overline{T_w}$$

が成立する.
従って $X=\sum_{x\in W} a_xT_x, Y=\sum_{y\in W} b_yT_y\in\mathcal{H}(W)$ に対して

$$\begin{aligned}
\overline{XY} &= \overline{\sum_{x,y\in W} a_xb_yT_xT_y}\\
&= \sum_{x,y\in W} \overline{a_xb_y}\ \overline{T_xT_y}\\
&= \sum_{x,y\in W} \overline{a_x}\ \overline{b_y}\ \overline{T_x}\ \overline{T_y}\\
&= \sum_{x\in W} \overline{a_x}\ \overline{T_x}\sum_{y\in W} \overline{b_y}\ \overline{T_y}\\
&= \overline{\sum_{x\in W} a_xT_x}\ \overline{\sum_{y\in W} b_yT_y}\\
&= \overline{X}\ \overline{Y}
\end{aligned}$$

となり成立.
(ii) $s \in S$ に対して

$$\begin{aligned}\overline{\overline{T_s}} &= \overline{T_s^{-1}} \\ &= \overline{(q^{-1}T_s + (q^{-1}-1)T_e)} \\ &= q\overline{T_s} + (q-1)\overline{T_e} \\ &= q(q^{-1}T_s + (q^{-1}-1)T_e) + (q-1)T_e \\ &= T_s + (1-q)T_e + (q-1)T_e \\ &= T_s.\end{aligned}$$

従って $s_1s_2\dots s_r$ を w の reduced expression とすると (i) より

$$\begin{aligned}\overline{\overline{T_w}} &= \overline{\overline{T_{s_1s_2\dots s_r}}} \\ &= \overline{\overline{T_{s_1}T_{s_2}\dots T_{s_r}}} \\ &= \overline{\overline{T_{s_1}}\ \overline{T_{s_2}}\dots\overline{T_{s_r}}} \\ &= \overline{\overline{T_{s_1}}}\ \overline{\overline{T_{s_2}}}\dots\overline{\overline{T_{s_r}}} \\ &= T_{s_1}T_{s_2}\dots T_{s_r} \\ &= T_w.\end{aligned}$$

よって $X = \sum_{x\in W} a_xT_x \in \mathcal{H}(W)$ に対して

$$\begin{aligned}\overline{\overline{X}} &= \overline{\sum_{x\in W}\overline{a_x}\ \overline{T_x}} \\ &= \sum_{x\in W}\overline{\overline{a_x}}\ \overline{\overline{T_x}} \\ &= \sum_{x\in W} a_xT_x \\ &= X\end{aligned}$$

となり (ii) が成立する. □

4.2 R-polynomial

Def.-Prop. 4.2.1 (R-polynomial) $w \in W$ に対して

$$q^{\ell(w)}\overline{T_w} = \sum_{x\in W}(-1)^{\ell(x)+\ell(w)}R_{x,w}(q)T_x$$

で $R_{x,w}(q)$ を定義すると次が成立している.

(i) $R_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$.

(ii) $R_{w,w}(q) = 1$.
(iii) $R_{x,w}(q) = 0$ if $x \not\leq w$.

$R_{x,w}(q)$ は W の x, w に関する R-polynomial と呼ばれる.

Proof:
まず, $q^{\ell(e)}\overline{T_e} = T_e$ であるので

$$R_{e,e}(q) = 1 \in \mathbb{Z}[q], \quad R_{x,e}(q) = 0 \text{ if } x \neq e.$$

よって, $w \in W$, $w \neq e$ に対して (i), (ii), (iii) の成立を示す.
$s_1 s_2 \dots s_r$ を w の reduced expression とすると

$$\begin{aligned}
q^{\ell(w)}\overline{T_w} &= q^r \overline{T_{s_1 s_2 \dots s_r}} \\
&= q^r \overline{T_{s_1} T_{s_2} \dots T_{s_r}} \\
&= q^r \overline{T_{s_1}}\ \overline{T_{s_2}} \dots \overline{T_{s_r}} \\
&= q^r T_{s_1}^{-1} T_{s_2}^{-1} \dots T_{s_r}^{-1} \\
&= q^r (q^{-1}T_{s_1} + (q^{-1}-1)T_e)(q^{-1}T_{s_2} + (q^{-1}-1)T_e) \\
&\quad \dots (q^{-1}T_{s_r} + (q^{-1}-1)T_e) \\
&= (T_{s_1} + (1-q)T_e)(T_{s_2} + (1-q)T_e) \dots (T_{s_r} + (1-q)T_e) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r} (1-q)^{r-k} T_{s_{i_1}} T_{s_{i_2}} \dots T_{s_{i_k}} + (1-q)^r T_e
\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq r} (1-q)^{r-k} T_{s_{i_1}} T_{s_{i_2}} \dots T_{s_{i_k}} + (1-q)^r T_e \\
&= \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} R_{x,w}(q) T_x.
\end{aligned} \tag{10}$$

(i) $\{T_w; w \in W\}$ における積の定義より, (10) の左辺を計算すると, T_x の係数は全て $\mathbb{Z}[q]$ の元となるので

$$R_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q].$$

(ii) (10) の左辺で T_w が現れるのは, $k = r$, $(i_1, i_2, \dots, i_r) = (1, 2, \dots, r)$ のときに限られるので

$$R_{w,w}(q) = 1$$

となることがわかる.
(iii) (10) の左辺の形と $\{T_w; w \in W\}$ における積の定義と subword property より,

$$R_{x,w}(q) \neq 0 \Rightarrow x \leq w.$$

よって対偶をとることにより (iii) が成立する. □

Ex. 4.2.2 (i) $s, t \in S$, $s \neq t$ に対して

$$\begin{aligned} q^2\overline{T_{st}} &= (T_s + (1-q)T_e)(T_t + (1-q)T_e) \\ &= T_{st} + (1-q)T_s + (1-q)T_t + (1-q)^2 T_e. \end{aligned}$$

従って

$$R_{e,st}(q) = (q-1)^2, \quad R_{e,t}(q) = R_{e,s}(q) = q-1, \quad R_{st,st}(q) = 1.$$

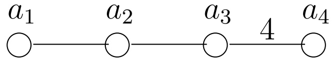
(ii) $W = S_3$ のとき

$$\begin{aligned} & q^3\overline{T_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1}} \\ &= (T_{\sigma_1} + (1-q)T_e)(T_{\sigma_2} + (1-q)T_e)(T_{\sigma_1} + (1-q)T_e) \\ &= (T_{\sigma_1} + (1-q)T_e)(T_{\sigma_2\sigma_1} + (1-q)T_{\sigma_1} + (1-q)T_{\sigma_2} + (1-q)^2T_e) \\ &= T_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1} + (1-q)T_{\sigma_1}^2 + (1-q)T_{\sigma_1\sigma_2} + (1-q)^2T_{\sigma_1} \\ &\quad +(1-q)T_{\sigma_2\sigma_1} + (1-q)^2T_{\sigma_1} + (1-q)^2T_{\sigma_2} + (1-q)^3T_e \\ &= T_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1} + (1-q)(qT_e + (q-1)T_{\sigma_1}) + (1-q)T_{\sigma_1\sigma_2} + (1-q)^2T_{\sigma_1} \\ &\quad +(1-q)T_{\sigma_2\sigma_1} + (1-q)^2T_{\sigma_1} + (1-q)^2T_{\sigma_2} + (1-q)^3T_e \\ &= T_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1} + (1-q)T_{\sigma_1\sigma_2} + (1-q)T_{\sigma_2\sigma_1} \\ &\quad +(1-q)^2T_{\sigma_1} + (1-q)^2T_{\sigma_2} + (1-2q+2q^2-q^3)T_e \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} & R_{\sigma_1\sigma_2\sigma_1,\sigma_1\sigma_2\sigma_1}(q) = 1, \\ & R_{\sigma_1\sigma_2,\sigma_1\sigma_2\sigma_1}(q) = R_{\sigma_2\sigma_1,\sigma_1\sigma_2\sigma_1}(q) = q-1, \\ & R_{\sigma_1,\sigma_1\sigma_2\sigma_1}(q) = R_{\sigma_2,\sigma_1\sigma_2\sigma_1}(q) = q^2-2q+1, \\ & R_{e,\sigma_1\sigma_2\sigma_1}(q) = q^3-2q^2+2q-1. \end{aligned}$$

Rem. 4.2.3 $R_{x,w}(q)$ の各係数は次数の高いものから順に, $+-$ が交互に現れそうにみえるが, 実際はそうとは限らない. [2] によると

$W :$ 

のとき[14]，

$$R_{a_4,a_2a_3a_4a_2a_3a_4a_2a_1a_2a_3}(q) = q^9-4q^8+6q^7-3q^6-2q^5+2q^4+3q^3-6q^2+4q-1.$$

まず R-polynomial は帰納的に次のようにかける.

Prop. 4.2.4 $x, w \in W$, $s \in S$ に対して次が成立している.

(i) $sw < w$ のとき

$$R_{x,w}(q) = \begin{cases} R_{sx,sw}(q) & \text{if } sx < x, \\ qR_{sx,sw}(q) + (q-1)R_{x,sw}(q) & \text{if } x < sx. \end{cases}$$

(ii) $ws < w$ のとき

$$R_{x,w}(q) = \begin{cases} R_{xs,ws}(q) & \text{if } xs < x, \\ qR_{xs,ws}(q) + (q-1)R_{x,ws}(q) & \text{if } x < xs. \end{cases}$$

[14] i.e. W: B_4 型 Weyl 群.

Proof:
(i) R-polynomial の定義より

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in W}(-1)^{\ell(x)+\ell(w)}R_{x,w}(q)T_x = q^{\ell(w)}\overline{T_w} = q^{\ell(w)}\overline{T_{s(sw)}} = q^{\ell(w)}\overline{T_sT_{sw}} \\
&= q^{\ell(sw)+\ell(s)}\overline{T_s}\ \overline{T_{sw}} = q\overline{T_s}q^{\ell(sw)}\overline{T_{sw}} \\
&= (T_s+(1-q)T_e)\sum_{x\in W}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)T_x \\
&= \sum_{x\in W}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)(T_sT_x+(1-q)T_x) \\
&= \sum_{x\in W}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)(1-q)T_x + \sum_{x\in W, x<sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)T_{sx} \\
&\quad + \sum_{x\in W, x>sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)(qT_{sx}+(q-1)T_x) \\
&= \sum_{x\in W}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)(1-q)T_x + \sum_{x\in W, x<sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)T_{sx} \\
&\quad + \sum_{x\in W, x>sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)qT_{sx} - \sum_{x\in W, x>sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)(1-q)T_x \\
&= \sum_{x\in W, x<sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)(1-q)T_x + \sum_{x\in W, x<sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)T_{sx} \\
&\quad + \sum_{x\in W, x>sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)qT_{sx} \\
&= \sum_{x\in W, x<sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(sw)}R_{x,sw}(q)(1-q)T_x + \sum_{x\in W, sx<x}(-1)^{\ell(sx)+\ell(sw)}R_{sx,sw}(q)T_x \\
&\quad + \sum_{x\in W, x<sx}(-1)^{\ell(sx)+\ell(sw)}R_{sx,sw}(q)qT_x \\
&= \sum_{x\in W, sx<x}(-1)^{\ell(x)+\ell(w)}R_{sx,sw}(q)T_x + \sum_{x\in W, x<sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(w)}qR_{sx,sw}(q)T_x \\
&\quad - \sum_{x\in W, x<sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(w)}(1-q)R_{x,sw}(q)T_x \\
&= \sum_{x\in W, sx<x}(-1)^{\ell(x)+\ell(w)}R_{sx,sw}(q)T_x \\
&\quad + \sum_{x\in W, x<sx}(-1)^{\ell(x)+\ell(w)}(qR_{sx,sw}(q)+(q-1)R_{x,sw}(q))T_x
\end{aligned}
$$

従って, 両辺の T_x の係数を比較することにより

$$
R_{x,w}(q) = \begin{cases} R_{sx,sw}(q) & \text{if } sx<x, \\ qR_{sx,sw}(q)+(q-1)R_{x,sw}(q) & \text{if } x<sx. \end{cases}
$$

(ii) は (i) と同様に示せる. □

Prop. 4.2.4 を用いれば次のことがわかる.

Cor. 4.2.5 $x, w \in W$ に対して

(i) $\deg R_{x,w}(q) = \ell(w) - \ell(x)$ if $x \leq w$.
(ii) $R_{x,w}(q) = R_{x^{-1},w^{-1}}(q)$.

Proof:
(i) $\ell(w)$ の帰納法により示す.
$\ell(w) = 0$ のとき.
このときは $x = w = e$ であるので $R_{e,e}(q) = 1$ より

$$\deg R_{x,w}(q) = \deg 1 = 0 = \ell(w) - \ell(x)$$

となり成立.
$\ell(w) = k - 1$ まで成立したと仮定し $\ell(w) = k$ のときを示す $(k \geq 1)$.
$s \in S$, $sw < w$ とすると, Prop. 4.2.4 より

$$R_{x,w}(q) = \begin{cases} R_{sx,sw}(q) & \text{if } sx < x, \\ qR_{sx,sw}(q) + (q-1)R_{x,sw}(q) & \text{if } x < sx. \end{cases}$$

従って 2 つの場合に分けて考える.
Case 1. $sx < x$ のとき.
Prop. 3.3.4 と帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} \deg R_{x,w}(q) &= \deg R_{sx,sw}(q) \\ &= \ell(sw) - \ell(sx) \\ &= \ell(w) - 1 - (\ell(x) - 1) \\ &= \ell(w) - \ell(x). \end{aligned}$$

Case 2. $x < sx$ のとき.
まず Prop. 3.3.4 と帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned} \deg(qR_{sx,sw}(q)) &= \begin{cases} 1 + \ell(sw) - \ell(sx) & \text{if } sx \leq sw, \\ 0 & \text{if } sx \not\leq sw, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \ell(w) - \ell(x) - 1 & \text{if } sx \leq sw, \\ 0 & \text{if } sx \not\leq sw, \end{cases}, \\ \deg((q-1)R_{x,sw}(q)) &= 1 + \ell(sw) - \ell(x) \\ &= \ell(w) - \ell(x) \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} \deg R_{x,w}(q) &= \deg(qR_{sx,sw}(q) + (q-1)R_{x,sw}(q)) \\ &= \ell(w) - \ell(x) \end{aligned}$$

となるので成立する.
(ii) $x \not\leq w$ のときは両辺ともに 0 であるので $x \leq w$ のときを示す.
$\ell(w)$ の帰納法により示す.
$\ell(w) = 0$ のときは 両辺 $= 1$ となり成立.
$\ell(w) = k-1$ まで o.k. とし $\ell(w) = k$ のときを示す ($k \geq 1$).
$sw < w$ ($s \in S$) とする (このとき $w^{-1}s < w^{-1}$ であることに注意).
帰納法の仮定より

$$
\begin{aligned}
R_{x,w}(q) &= \begin{cases} R_{sx,sw}(q) & \text{if } sx < x, \\ qR_{sx,sw}(q) + (q-1)R_{x,sw}(q) & \text{if } x < sx \end{cases} \\
&= \begin{cases} R_{x^{-1}s,w^{-1}s}(q) & \text{if } sx < x, \\ qR_{x^{-1}s,w^{-1}s}(q) + (q-1)R_{x^{-1},w^{-1}s}(q) & \text{if } x < sx \end{cases} \\
&= \begin{cases} R_{x^{-1}s,w^{-1}s}(q) & \text{if } x^{-1}s < x^{-1}, \\ qR_{x^{-1}s,w^{-1}s}(q) + (q-1)R_{x^{-1},w^{-1}s}(q) & \text{if } x^{-1} < x^{-1}s \end{cases} \\
&= R_{x^{-1},w^{-1}}(q). \quad \square
\end{aligned}
$$

さらに Prop. 4.2.4 を用いれば次のことも容易にわかる.

Cor. 4.2.6 $W = I_2(m)$, $x, w \in W$, $x < w$, $\ell(w) - \ell(x) = r$ のとき

$$
\begin{aligned}
R_{x,w}(q) &= q^r - 2q^{r-1} + 2q^{r-2} - 2q^{r-3} + \ldots + (-1)^{r-1}2q + (-1)^r \\
(&= \frac{(q-1)(q^r - (-1)^r)}{q+1}).
\end{aligned}
$$

Problem 5 Cor. 4.2.6 を示せ[15] .

次は非常に重要な等式である.

Th. 4.2.7 $x, w \in W$ に対して

(i) $(-q)^{\ell(w)-\ell(x)}\overline{R_{x,w}(q)} = R_{x,w}(q)$.
(ii) $\sum_{x \leq y \leq w} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} R_{x,y}(q) R_{y,w}(q) = \delta_{x,w}$.

ここで $\delta_{x,w}$ はクロネッカーのデルタとする[16] .

---

[15] $I_2(m)$ では $\ell(x) < \ell(w) \Leftrightarrow x < w$ が成立していることに注意 (cf. Rem. 3.2.3).
[16] i.e. $\delta_{x,w} = 1$ if $x = w$, $\delta_{x,w} = 0$ if $x \neq w$.

Proof:
$x \not\leq w$ のときには (i), (ii) ともに両辺$=0$ となり成立しているので, $x \leq w$ に対して示す.
(i) $\ell(w)$ に関する帰納法により示す.
$\ell(w)=0$ (i.e. $w=e$) のとき
$x \leq w$ より $x=e$ で両辺$=1$ となり成立.
$\ell(w)=k-1$ まで o.k. とし $\ell(w)=k$ のときを示す ($k \geq 1$).
$k \geq 1$ より $\exists s \in S$ s.t. $sw < w$.
2 つの場合に分けて示す.
Case 1. $sx < x$ のとき

$$\begin{aligned}
&(-q)^{\ell(w)-\ell(x)}\overline{R_{x,w}(q)} \\
&= (-1)^{\ell(w)+\ell(x)} q^{\ell(w)-\ell(x)} R_{x,w}(q^{-1}) \\
&= (-1)^{\ell(w)+\ell(x)} q^{\ell(w)-\ell(x)} R_{sx,sw}(q^{-1}) \\
&= (-1)^{\ell(sw)+\ell(sx)} q^{\ell(sw)-\ell(sx)} R_{sx,sw}(q^{-1}) \\
&= (-q)^{\ell(sw)-\ell(sx)}\overline{R_{sx,sw}(q)} \\
&= R_{sx,sw}(q) \\
&= R_{x,w}(q).
\end{aligned}$$

Case 2. $x < sx$ のとき

$$\begin{aligned}
&(-q)^{\ell(w)-\ell(x)}\overline{R_{x,w}(q)} \\
&= (-1)^{\ell(w)+\ell(x)} q^{\ell(w)-\ell(x)} R_{x,w}(q^{-1}) \\
&= (-1)^{\ell(w)+\ell(x)} q^{\ell(w)-\ell(x)} (q^{-1}R_{sx,sw}(q^{-1}) + (q^{-1}-1)R_{x,sw}(q^{-1})) \\
&= q(-1)^{\ell(sw)+\ell(sx)} q^{\ell(sw)-\ell(sx)} R_{sx,sw}(q^{-1}) \\
&\quad -(-1)^{\ell(sw)+\ell(x)} q^{\ell(sw)-\ell(x)} (1-q) R_{x,sw}(q^{-1}) \\
&= q(-q)^{\ell(sw)-\ell(sx)}\overline{R_{sx,sw}(q)} + (q-1)(-q)^{\ell(sw)-\ell(x)}\overline{R_{x,sw}(q)} \\
&= qR_{sx,sw}(q) + (q-1)R_{x,sw}(q) \\
&= R_{x,w}(q).
\end{aligned}$$

従って帰納法により (i) が証明された.
(ii) R-polynomial の定義より

$$\overline{T_w} = q^{-\ell(w)} \sum_{y \in W} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)} R_{y,w}(q) T_y.$$

従って, $\overline{\overline{T_w}} = T_w$ より

$$\begin{aligned}
T_w &= \overline{q^{-\ell(w)} \sum_{y\in W} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)} R_{y,w}(q) T_y} \\
&= q^{\ell(w)} \sum_{y\in W} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)} \overline{R_{y,w}(q)}\ \overline{T_y} \\
&= q^{\ell(w)} \sum_{y\in W} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)} \overline{R_{y,w}(q)} q^{-\ell(y)} \sum_{x\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} R_{x,y}(q) T_x \\
&= \sum_{x\in W} \sum_{y\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} (-q)^{\ell(w)-\ell(y)} \overline{R_{y,w}(q)} R_{x,y}(q) T_x \\
&= \sum_{x\in W} \sum_{y\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} R_{y,w}(q) R_{x,y}(q) T_x \quad (\because \text{(i)}) \\
&= \sum_{x\in W} \Big(\sum_{x\le y\le w} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} R_{x,y}(q) R_{y,w}(q) \Big) T_x.
\end{aligned}$$

従って

$$\sum_{x\le y\le w} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} R_{x,y}(q) R_{y,w}(q) = \delta_{x,w}. \quad \square$$

W が finite Coxeter group のときには次が成立している.

Prop. 4.2.8 W: finite Coxeter group のとき, $x, w \in W$ に対して

$$R_{x,w}(q) = R_{w_0w,w_0x}(q) = R_{ww_0,xw_0}(q) = R_{w_0xw_0,w_0ww_0}(q).$$

Proof:
Cor. 3.2.9 より

$$x \not\le w \Leftrightarrow w_0w \not\le w_0x \Leftrightarrow ww_0 \not\le xw_0 \Leftrightarrow w_0xw_0 \not\le w_0ww_0.$$

従って $x \not\le w$ に対しては全て 0 となり成立しているので, $x \le w$ に対しての成立を示す.
まず

$$R_{x,w}(q) = R_{w_0w,w_0x}(q) \tag{11}$$

となることを $\ell(w)$ の帰納法で示す.
$\ell(w) = 0$ (i.e.$w = e$) のとき.
$x \le w$ より $x = e$ であり,

$$R_{e,e}(q) = 1 = R_{w_0,w_0}(q)$$

となり成立.
$\ell(w) = k-1$ まで成立したと仮定し $\ell(w) = k$ のときを示す ($k \ge 1$).

$s \in S$, $ws < w$ とする.
２つの場合に分けて考える.
Case 1. $xs < x$ のとき.

$$\begin{aligned} R_{x,w}(q) &= R_{xs,ws}(q) \\ &= R_{w_0ws,w_0xs}(q) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= R_{w_0w,w_0x}(q) \quad (\because w_0w < w_0ws,\, w_0x < w_0xs). \end{aligned}$$

Case 2. $x < xs$ のとき.

$$\begin{aligned} &R_{x,w}(q) \\ &= qR_{xs,ws}(q) + (q-1)R_{x,ws} \\ &= qR_{w_0ws,w_0xs}(q) + (q-1)R_{w_0ws,w_0x} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= qR_{w_0ws,w_0xs}(q) + (q-1)R_{w_0w,w_0xs} \quad (\because w_0w < w_0ws, w_0xs < w_0x) \\ &= R_{w_0w,w_0x}(q) \quad (\because w_0w < w_0ws, w_0xs < w_0x). \end{aligned}$$

従って帰納法により成立する.
他の等式を (11), Cor. 4.2.5-(ii) を用いて示す.

$$\begin{aligned} R_{ww_0,xw_0}(q) &= R_{(ww_0)^{-1},(xw_0)^{-1}}(q) \quad (\because \text{Cor. 4.2.5-(ii)}) \\ &= R_{w_0w^{-1},w_0x^{-1}}(q) \quad (\because w_0^{-1} = w_0) \\ &= R_{x^{-1},w^{-1}}(q) \quad (\because (11)) \\ &= R_{x,w}(q). \end{aligned} \tag{12}$$

さらに (11), (12) より

$$R_{x,w}(q) = R_{w_0w,w_0x}(q) = R_{w_0xw_0,w_0ww_0}(q).$$

よって

$$R_{x,w}(q) = R_{w_0w,w_0x}(q) = R_{ww_0,xw_0}(q) = R_{w_0xw_0,w_0ww_0}(q)$$

が成立する. □

R-polynomial の定数項と 1 次の係数に関しては次が成立している.

Prop. 4.2.9 $P(q) = \sum_{i \geq 0} a_i q^i \in \mathbb{Z}[q]$ に対して

$$[q^i](P(q)) := a_i$$

とおく.
$x, w \in W$, $x \leq w$ に対して次が成立する.

(i) $[1](R_{x,w}(q)) = (-1)^{\ell(w)-\ell(x)}$.
(ii) $\ell(w) = \ell(x) + \ell(x^{-1}w)$ のとき

$$[q](R_{x,w}(q)) = (-1)^{\ell(w)-\ell(x)+1} g(x^{-1}w).$$

Proof:
(i) $\ell(w)$ に関する帰納法により示す.
$R_{e,e}(q) = 1$ より $\ell(w) = 0$ のときには成立している.
$\ell(w) = k-1$ まで成立していたと仮定し $\ell(w) = k$ のときを示す $(k \geq 1)$.
$s \in S$, $sw < w$ とする.
$[1](R_{x,w}(q)) = R_{x,w}(0)$ であるので Prop. 4.2.4, Prop. 3.3.4 と帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}
[1](R_{x,w}(q)) &= R_{x,w}(0) \\
&= \begin{cases} R_{sx,sw}(0) & \text{if } sx < x, \\ 0R_{sx,sw}(0) + (0-1)R_{x,sw}(0) & \text{if } x < sx. \end{cases} \\
&= \begin{cases} [1](R_{sx,sw}(q)) & \text{if } sx < x, \\ -[1](R_{x,sw}(q)) & \text{if } x < sx. \end{cases} \\
&= \begin{cases} (-1)^{\ell(sw)-\ell(sx)} & \text{if } sx < x, \\ -(-1)^{\ell(sw)-\ell(x)} & \text{if } x < sx. \end{cases} \\
&= (-1)^{\ell(w)-\ell(x)}
\end{aligned}$$

となり成立する.
(ii) $\ell(w) = \ell(x) + \ell(x^{-1}w)$ より

$$\begin{aligned}
x &= s_1 s_2 \ldots s_r\text{: reduced expression} \\
x^{-1}w &= s_{r+1} s_{r+2} \ldots s_k\text{: reduced expression}
\end{aligned}$$

とすると

$$w = s_1 s_2 \ldots s_r s_{r+1} \ldots s_k\text{: reduced expression}$$

である[17].
従って Prop. 4.2.4 より

$$R_{x,w}(q) = R_{s_1 s_2 \ldots s_r, s_1 s_2 \ldots s_r s_{r+1} \ldots s_k}(q) = R_{e, s_{r+1} \ldots s_k}(q) = R_{e,x^{-1}w}(q).$$

故に $w \in W$ に対して

$$[q](R_{e,w}(q)) = (-1)^{\ell(w)+1} g(w)$$

[17] 実際は $\ell(w) = \ell(x) + \ell(x^{-1}w)$ の条件だけでを満たすと $x \leq w$ である.

が示せるとよい.
$\ell(w)$ の帰納法で示す.
$\ell(w)=0$ (i.e. $w=e$) のときは両辺ともに 0 となり成立.
$\ell(w)=k-1$ まで成立したと仮定し $\ell(w)=k$ のときを示す ($k\geq 1$).
$s\in S$, $sw<w$ とすると Prop. 4.2.4 より

$$\begin{aligned}[q](R_{e,w}(q)) &= [q](qR_{s,sw}(q)+(q-1)R_{e,sw}(q)) \\ &= [1](R_{s,sw}(q))+[1](R_{e,sw}(q))-[q](R_{e,sw}(q)) \\ &= \begin{cases} (-1)^{\ell(sw)-\ell(s)} & \text{if } s<sw \\ 0 & \text{if } s\not< sw \end{cases} \\ &\quad +(-1)^{\ell(sw)}-(-1)^{\ell(sw)+1}g(sw) \\ &= \begin{cases} (-1)^{\ell(w)} & \text{if } s<sw \\ 0 & \text{if } s\not< sw \end{cases} \\ &\quad -(-1)^{\ell(w)}+(-1)^{\ell(w)+1}g(sw) \\ &= \begin{cases} (-1)^{\ell(w)+1}g(sw) & \text{if } s<sw \\ (-1)^{\ell(w)+1}(g(sw)+1) & \text{if } s\not< sw \end{cases} \\ &= (-1)^{\ell(w)+1}g(w).\end{aligned}$$

従って, (ii) の成立が示された. □

4.3 conjectures and results

Conjecture 4.3.1 (Brenti [5]) $x,w\in W$, $x\leq w$, $i\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}&[x,w]:=\{y\in W; x\leq y\leq w\},\\ &c_i(x,w):=\sharp\{y\in[x,w];\ell(w)-\ell(y)=i\}\end{aligned}$$

とおくと次が成立する.

(i) $(-1)^{\ell(w)-\ell(x)+i}[q^i](R_{x,w}(q))\leq c_i(x,w)$.
(ii) $(-1)^{\ell(w)-\ell(x)+i}[q^i](R_{x,w}(q))\leq \binom{\ell(w)-\ell(x)}{i}$.

Rem. 4.3.2 (i) において, $i=0$ のときには Prop. 4.2.9 より等号が成立している. また, $i=1$ のときには右辺-左辺が Kazhdan-Lusztig polynomial の一次の係数と一致しており, Dyer [7], T [12] によりその成立が証明されている (詳細後述). (ii) に関しては $i\leq 2$ に対しての成立が Brenti [5] により示されている.

$c_i(x,w)$ については次の不等式の成立が示されている.

Fact 4.3.3 (T [13]) $x, w \in W$, $x \leq w$, $\ell(w) = \ell(x) + \ell(x^{-1}w)$, $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\binom{g(x^{-1}w)}{i} \leq c_i(x,w).$$

Prop. 3.6.5 が $x = e$, $i = 1$ の場合となっている.
実際は parabolic subgroup に対しての拡張された等式として記述されている.

また次のようなことも知られている.

Fact 4.3.4 (Brenti [4]) $x, w \in W$, $x \leq w$ に対して

$$[u,v] \not\simeq S_3 \text{ for } \forall u, v \in [x,w] \Leftrightarrow R_{x,w}(q) = (q-1)^{\ell(w)-\ell(x)}.$$

従って, 特に

$$\ell(w) - \ell(x) \leq 2 \Rightarrow R_{x,w}(q) = (q-1)^{\ell(w)-\ell(x)}.$$

5 Kazhdan-Lusztig polynomial

5.1 Kazhdan-Lusztig polynomial

Def.-Prop. 5.1.1 (Kazhdan-Lusztig polynomial) 次の (KL1)-(KL4) を満たす多項式の集合 $\{P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]; x, w \in W\}$ が一意的に存在する.

$$\begin{array}{ll}
\text{(KL1)} & P_{x,x}(q) = 1 \text{ for } \forall x \in W. \\
\text{(KL2)} & P_{x,w}(q) = 0 \text{ if } x \not\leq w. \\
\text{(KL3)} & \deg P_{x,w}(q) \leq \frac{\ell(w)-\ell(x)-1}{2} \text{ if } x < w. \\
\text{(KL4)} & q^{\ell(w)-\ell(x)}\overline{P_{x,w}(q)} = \sum_{x \leq y \leq w} R_{x,y}(q) P_{y,w}(q).
\end{array}$$

$P_{x,w}(q)$ は W の x, w に関する Kazhdan-Lusztig polynomial と呼ばれる.

証明の前に記号を準備する.

Notation 5.1.2

$$\mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] := \mathbb{Z}[q^{-\frac{1}{2}}] - \mathbb{Z},$$
$$\mathbb{Z}^+[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] := \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}] - \mathbb{Z}$$

とおく.

Rem. 5.1.3 次が成立していることに注意.

(i) $\mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \cap \mathbb{Z}^+[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] = \{0\}$.
(ii) $\mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \cup \mathbb{Z}^+[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$.
(iii) (KL3) は次の (KL3)' と同値 (i.e. 入れ替えてもよい).

$$\text{(KL3)}' \quad q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \text{ if } x < w.$$

Proof of Def.-Prop. 5.1.1:
$R_{x,x}(q) = 1$ であるので

$$q^{\ell(w)-\ell(x)}\overline{P_{x,w}(q)} = \sum_{x \leq y \leq w} R_{x,y}(q) P_{y,w}(q)$$

を書き換えると

$$q^{\ell(w)-\ell(x)}\overline{P_{x,w}(q)} - P_{x,w}(q) = \sum_{x < y \leq w} R_{x,y}(q) P_{y,w}(q). \tag{13}$$

両辺に $q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}$ をかけると

$$\overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}P_{x,w}(q)} - q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}P_{x,w}(q) = q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{x<y\leq w} R_{x,y}(q)P_{y,w}(q). \quad (14)$$

(14) を用いて well defined を示す.
存在証明を $\ell(w)-\ell(x)$ に関する帰納法により行う.
$\ell(w)-\ell(x)=0$ のときには

$$P_{x,w}(q) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq w \text{ (i.e. } x = w), \\ 0 & \text{if } x \not\leq w \end{cases}$$

とおけばよい.
$\ell(w)-\ell(x) \leq k-1$ となる $x, w \in W$ に対しては上記を満たす $P_{x,w}(q)$ が存在していたと仮定し $\ell(w)-\ell(x)=k$ のときの $P_{x,w}(q)$ の存在を示す ($k \geq 1$).

$$q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{x<y\leq w} R_{x,y}(q)P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q^{-\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{2}}]$$

より

$$\begin{aligned} &{}^{\exists!}P \in \mathbb{Z}^{-}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}], {}^{\exists!}Q \in \mathbb{Z}^{+}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}], {}^{\exists!}c \in \mathbb{Z} \\ &\text{s.t. } q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{x<y\leq w} R_{x,y}(q)P_{y,w}(q) = P + Q + c. \end{aligned}$$

まず, 仮定と Def.-Prop. 4.2.1 より

$$\sum_{x<y\leq w} R_{x,y}(q)P_{y,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$$

であるので

$$q^{\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2}}P, q^{\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2}}Q, q^{\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2}}c \in \mathbb{Z}[q]. \quad (15)$$

次に, $\overline{P}=-Q$, $c=0$ となっていることを帰納法の仮定と Th. 4.2.7 を用いて示す.

$$
\begin{aligned}
&\overline{P+Q+c}\\
&=\overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}\sum_{x<y\leq w}R_{x,y}(q)P_{y,w}(q)}\\
&=q^{\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2}}\sum_{x<y\leq w}\overline{R_{x,y}(q)}\ \overline{P_{y,w}(q)}\\
&=q^{\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2}}\sum_{x<y\leq w}\overline{R_{x,y}(q)}q^{\ell(y)-\ell(w)}\sum_{y\leq z\leq w}R_{y,z}(q)P_{z,w}(q)\\
&=q^{\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2}}\sum_{x<y\leq w}(-q)^{\ell(x)-\ell(y)}R_{x,y}(q)q^{\ell(y)-\ell(w)}\sum_{y\leq z\leq w}R_{y,z}(q)P_{z,w}(q)\\
&=q^{\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2}}\sum_{x<y\leq z\leq w}(-1)^{\ell(x)-\ell(y)}q^{\ell(x)-\ell(w)}R_{x,y}(q)R_{y,z}(q)P_{z,w}(q)\\
&=q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}\sum_{x<z\leq w}(\sum_{x<y\leq z}(-1)^{\ell(x)+\ell(y)}R_{x,y}(q)R_{y,z}(q))P_{z,w}(q)\\
&=q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}\sum_{x<z\leq w}(\sum_{x\leq y\leq z}(-1)^{\ell(x)+\ell(y)}R_{x,y}(q)R_{y,z}(q)-R_{x,z}(q))P_{z,w}(q)\\
&=q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}\sum_{x<z\leq w}(\delta_{x,z}-R_{x,z}(q))P_{z,w}(q)\\
&=-q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}\sum_{x<z\leq w}R_{x,z}(q)P_{z,w}(q)\\
&=-(P+Q+c)
\end{aligned}
$$

従って

$$\overline{P}+Q+\overline{Q}+P+2c=0$$

となるので $\overline{P}+Q\in\mathbb{Z}^{+}[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}]$, $\overline{Q}+P\in\mathbb{Z}^{-}[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}]$, $c\in\mathbb{Z}$ より

$$\overline{P}+Q=\overline{Q}+P=2c=0.$$

即ち

$$\overline{P}=-Q,\quad c=0.$$

よって

$$q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}\sum_{x<y\leq w}R_{x,y}(q)P_{y,w}(q)=P-\overline{P}$$

となるので

$$P_{x,w}(q):=-q^{\frac{\ell(w)-\ell(x)}{2}}P$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
\overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}P_{x,w}(q)}-q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}P_{x,w}(q)\ &=\overline{-P}+P\\
&=q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}\sum_{x<y\leq w}R_{x,y}(q)P_{y,w}(q)
\end{aligned}
$$

となり (14) が成立し, (15) より

$$P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q].$$

また $P \in \mathbb{Z}^{-}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$ より

$$q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{x,w}(q) = -P \in \mathbb{Z}^{-}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$$

であるので

$$\deg P_{x,w}(q) \leq \frac{\ell(w)-\ell(x)-1}{2}.$$

以上により $P_{x,w}(q)$ の存在が帰納的に証明された.
一意性は作り方より自明といってもいいのであるが, あえて簡単に証明をつけるとすると次のようになる.
$x < y \leq w$ となる $P_{y,w}(q)$ に対しては一意性が示されたという仮定の下で $P_{x,w}(q)$ の一意性を示す.
$P_{x,w}(q)$ と同じ条件を満たす多項式 $U_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ があったとする.
このとき (14) と仮定より

$$\overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{x,w}(q)} - q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{x,w}(q) = \overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} U_{x,w}(q)} - q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} U_{x,w}(q)$$

即ち

$$\overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} (P_{x,w}(q) - U_{x,w}(q))} = q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} (P_{x,w}(q) - U_{x,w}(q)). \tag{16}$$

他方, $\deg P_{x,w}(q), \deg U_{x,w}(q) \leq \frac{\ell(w)-\ell(x)-1}{2}$ より

$$\begin{aligned} q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} (P_{x,w}(q) - U_{x,w}(q)) &\in \mathbb{Z}^{-}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}], \\ \overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} (P_{x,w}(q) - U_{x,w}(q))} &\in \mathbb{Z}^{+}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

従って (16) より

$$q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} (P_{x,w}(q) - U_{x,w}(q)) \in \mathbb{Z}^{-}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \cap \mathbb{Z}^{+}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] = \{0\}$$

となるので

$$P_{x,w}(q) = U_{x,w}(q).$$

よって一意性が証明された. □

Ex. 5.1.4 (i) $s \in S$ に対して

$$\begin{aligned} q^{\ell(s)-\ell(e)}\overline{P_{e,s}(q)} - P_{e,s}(q) &= \sum_{e<x\leq s} R_{e,x}(q)P_{x,s}(q) \\ &= R_{e,s}(q)P_{s,s}(q) \\ &= q-1 \end{aligned}$$

より

$$P_{e,s}(q) = 1.$$

(ii) $s, t \in S$ $(s \neq t)$ に対して

$$\begin{aligned} q^{\ell(st)-\ell(s)}\overline{P_{s,st}(q)} - P_{s,st}(q) &= \sum_{s<x\leq st} R_{s,x}(q)P_{x,st}(q) \\ &= R_{s,st}(q)P_{st,st}(q) \\ &= q-1 \end{aligned}$$

より

$$P_{s,st}(q) = 1.$$

同様に

$$P_{t,st}(q) = 1.$$

従って

$$\begin{aligned} & q^{\ell(st)-\ell(e)}\overline{P_{e,st}(q)} - P_{e,st}(q) \\ &= \sum_{e<x\leq st} R_{e,x}(q)P_{x,st}(q) \\ &= R_{e,s}(q)P_{s,st}(q) + R_{e,t}(q)P_{t,st}(q) + R_{e,st}(q)P_{st,st}(q) \\ &= (q-1) + (q-1) + (q-1)^2 \\ &= q^2 - 1 \end{aligned}$$

より

$$P_{e,st}(q) = 1$$

となる[18].

(iii) 1 でない Kazhdan-Lusztig polynomial の例.

S_4 において

$$P_{e,\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2}(q) = P_{\sigma_2,\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2}(q) = 1 + q$$

[18] 実際は長さの差が 2 以下の Kazhdan-Lusztig polynomial は全て 1 になることがわかる. この証明は Cor. 5.2.5 で述べる.

であり, S_5 において

$$P_{\sigma_3\sigma_2,\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3\sigma_1\sigma_2}(q) = 1 + 2q$$

となることが知られている[19].

(iv) $x, w \in I_2(m)$, $\ell(x) < \ell(w)$ のとき

$$P_{x,w}(q) = 1.$$

Problem 6 Ex. 5.1.4-(iv) を示せ[20].

R-polynomial と同じような等式が成立するかをみていく.

Prop. 5.1.5 $x, w \in W$ に対して

$$P_{x,w}(q) = P_{x^{-1},w^{-1}}(q).$$

Proof:

$x \not\leq w$ のときは両辺$=0$となるので o.k.

$x \leq w$ のときを考える.

$\ell(w) - \ell(x)$ に関する帰納法により示す.

$\ell(w) - \ell(x) = 0$ のとき $x = w$ であるので両辺ともに 1 となり成立.

$\ell(w) - \ell(x) = k - 1$ まで o.k. とし, $\ell(w) = k$ のときを示す ($k \geq 1$).

(14), 帰納法の仮定, Cor. 4.2.5-(ii) より

$$\begin{aligned}
&\overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{x,w}(q)} - q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{x,w}(q) \\
&= q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{x<y\leq w} R_{x,y}(q) P_{y,w}(q) \\
&= q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{x<y\leq w} R_{x^{-1},y^{-1}}(q) P_{y^{-1},w^{-1}}(q) \\
&= q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{x^{-1}<y^{-1}\leq w^{-1}} R_{x^{-1},y^{-1}}(q) P_{y^{-1},w^{-1}}(q) \\
&= q^{\frac{\ell(x^{-1})-\ell(w^{-1})}{2}} \sum_{x^{-1}<y\leq w^{-1}} R_{x^{-1},y}(q) P_{y,w^{-1}}(q) \\
&= \overline{q^{\frac{\ell(x^{-1})-\ell(w^{-1})}{2}} P_{x^{-1},w^{-1}}(q)} - q^{\frac{\ell(x^{-1})-\ell(w^{-1})}{2}} P_{x^{-1},w^{-1}}(q) \\
&= \overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{x^{-1},w^{-1}}(q)} - q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{x^{-1},w^{-1}}(q)
\end{aligned}$$

[19] A_3, A_4, A_5, B_4, D_4 型の Weyl group, H_3 型の Coxeter group 等に関しては Mark Goresky の計算した Kazhdan-Lusztig polynomial の表があり, http://www.math.ias.edu/~goresky/ で公開されている.

[20] Cor. 4.2.6 と Kazhdan-Lusztig polynomial の (KL4) を用いて, $\ell(w) - \ell(x)$ に関する帰納法で示すとよい.

従って
$$\deg(P_{x^{-1},w^{-1}}(q)), \deg(P_{x,w}(q)) \leq \frac{\ell(w)-\ell(x)-1}{2}$$
であるので, Kazhdan-Lusztig polynomial の一意性の証明と同様に考えると
$$P_{x,w}(q) = P_{x^{-1},w^{-1}}(q)$$
が成立する.
故に帰納法により証明された. □

Prop. 5.1.6 W: finite Coxeter system とする. $x, w \in W$ に対して
$$P_{x,w}(q) = P_{w_0xw_0,w_0ww_0}(q).$$

Rem. 5.1.7 Prop. 5.1.6 より $P_{w_0w,w_0x}(q) = P_{ww_0,xw_0}(q)$ は成立しているが, これは Inverse Kazhdan-Lusztig polynomial $Q_{x,w}(q)$ と一致し, 一般に $P_{x,w}(q)$ になるとは限らない. 詳細については後述する.

Proof of Prop. 5.1.6:
R-polynomial に関しては
$$R_{x,w}(q) = R_{w_0xw_0,w_0ww_0}(q)$$
が成立しているので, Prop. 5.1.5 の証明とほぼ同様に示せる. □

5.2 C_w-basis

Prop. 5.2.1 $w \in W$ に対して
$$\begin{aligned} C_w &:= \sum_{x\in W}(-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x, \\ C'_w &:= q^{-\frac{\ell(w)}{2}} \sum_{x\in W} P_{x,w}(q) T_x. \end{aligned}$$
とおく.
このとき $w \in W$ に対して
$$\overline{C_w} = C_w, \quad \overline{C'_w} = C'_w.$$

Proof:
まじめに計算する.

$$
\begin{aligned}
&\overline{C_w} \\
&= \overline{\sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x} \\
&= \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{-\frac{\ell(w)}{2}+\ell(x)} P_{x,w}(q) \overline{T_x} \\
&= \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{-\frac{\ell(w)}{2}+\ell(x)} P_{x,w}(q) q^{-\ell(x)} \sum_{y \in W} (-1)^{\ell(y)+\ell(x)} R_{y,x}(q) T_y \\
&= \sum_{y \in W} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)} q^{-\frac{\ell(w)}{2}} \Big(\sum_{x \in W} R_{y,x}(q) P_{x,w}(q) \Big) T_y \\
&= \sum_{y \in W} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)} q^{-\frac{\ell(w)}{2}} q^{\ell(w)-\ell(y)} \overline{P_{y,w}(q)} T_y \\
&= \sum_{y \in W} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(y)} \overline{P_{y,w}(q)} T_y \\
&= C_w.
\end{aligned}
$$

同じくまじめに計算する.

$$
\begin{aligned}
&\overline{C'_w} \\
&= \overline{q^{-\frac{\ell(w)}{2}} \sum_{x \in W} P_{x,w}(q) T_x} \\
&= q^{\frac{\ell(w)}{2}} \sum_{x \in W} \overline{P_{x,w}(q)}\ \overline{T_x} \\
&= q^{\frac{\ell(w)}{2}} \sum_{x \in W} q^{\ell(x)-\ell(w)} \sum_{x \le y \le w} R_{x,y}(q) P_{y,w}(q) \\
&\quad \cdot q^{-\ell(x)} \sum_{z \in W} (-1)^{\ell(z)+\ell(x)} R_{z,x}(q) T_z \\
&= q^{-\frac{\ell(w)}{2}} \sum_{z \in W} \Big(\sum_{z \le y \le w} \Big(\sum_{z \le x \le y} (-1)^{\ell(z)+\ell(x)} R_{z,x}(q) R_{x,y}(q) \Big) P_{y,w}(q) \Big) T_z \\
&= q^{-\frac{\ell(w)}{2}} \sum_{z \in W} \Big(\sum_{z \le y \le w} \delta_{z,y} P_{y,w}(q) \Big) T_z \\
&= q^{-\frac{\ell(w)}{2}} \sum_{z \in W} P_{z,w}(q) T_z \\
&= C'_w. \quad \square
\end{aligned}
$$

Rem. 5.2.2 $w \in W$ に対して $[e,w] = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, $w_n = w$, $\ell(w_i) \le \ell(w_{i+1})$ for $i \in [n-1]$ とし,

$$
A := (a_{ij}), \quad a_{ij} := (-1)^{\ell(w_i)+\ell(w_j)} q^{\frac{\ell(w_j)}{2}-\ell(w_i)} \overline{P_{w_i,w_j}(q)}
$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} C_{w_1} \\ C_{w_2} \\ \vdots \\ C_{w_n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} T_{w_1} \\ T_{w_2} \\ \vdots \\ T_{w_n} \end{pmatrix}.$$

ここで

$$P_{w_i,w_j}(q) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i > j \end{cases}$$

であるので A は上半三角行列で,

$$a_{ii} = q^{-\frac{\ell(w_i)}{2}} \text{ for } i \in [n].$$

従って, $\det A \neq 0$ となるので

$$\begin{pmatrix} T_{w_1} \\ T_{w_2} \\ \vdots \\ T_{w_n} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} C_{w_1} \\ C_{w_2} \\ \vdots \\ C_{w_n} \end{pmatrix}.$$

これらのことより $\{C_w; w \in W\}$ は $\mathcal{H}(W)$ の基底となることがわかり $\mathcal{H}(W)$ の C_w-basis と呼ばれている.
同様に $\{C'_w; w \in W\}$ も $\mathcal{H}(W)$ の基底となっていることがわかる.

Ex. 5.2.3 $s \in S$ とする.

(i) $C_e = C'_e = T_e$.

(ii)

$$\begin{aligned} C_s &= \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(s)} q^{\frac{\ell(s)}{2} - \ell(x)} \overline{P_{x,s}(q)} T_x \\ &= (-1)^{\ell(e)+\ell(s)} q^{\frac{\ell(s)}{2} - \ell(e)} \overline{P_{e,s}(q)} T_e \\ &\quad + (-1)^{\ell(s)+\ell(s)} q^{\frac{\ell(s)}{2} - \ell(s)} \overline{P_{s,s}(q)} T_s \\ &= -q^{\frac{1}{2}} T_e + q^{-\frac{1}{2}} T_s. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} C'_s &= q^{-\frac{\ell(s)}{2}} \sum_{x \in W} P_{x,s}(q) T_x \\ &= q^{-\frac{1}{2}} (T_e + T_s). \end{aligned}$$

$\{C'_w; w \in W\}$ を用いると Kazhdan-Lusztig polynomial が帰納的に次のように表せることがわかる (cf. Appendix Th. 6.5.1).

Th. 5.2.4 (i) $x, w \in W$, $s \in S$, $sw < w$ とする.

$$\begin{aligned} P_{x,w}(q) &= \begin{cases} qP_{x,sw}(q) + P_{sx,sw}(q) & \text{if } sx < x \\ P_{x,sw}(q) + qP_{sx,sw}(q) & \text{if } x < sx \end{cases} \\ &- \sum_{sy<y<sw} q^{\frac{\ell(w)-\ell(y)}{2}} \mu(y, sw) P_{x,y}(q) \end{aligned}$$

ここで, $\mu(y, sw) := [q^{\frac{\ell(sw)-\ell(y)-1}{2}}](P_{y,sw}(q))$.

(ii) $x, w \in W$, $s \in S$, $sw < w$ に対して

$$P_{x,w}(q) = P_{sx,w}(q).$$

$sw < w$ のとき $x \leq w \Leftrightarrow sx \leq w$ となっていることに注意 (cf. Lem. 3.3.4).

Th. 5.2.4 の系として次が成立する.

Cor. 5.2.5 $x, w \in W$, $x \leq w$ に対して

(i) $[1](P_{x,w}(q)) = 1$.

(ii) $P_{x,w}(q) = 1$ if $\ell(w) - \ell(x) \leq 2$.

Proof:

(i) $\ell(w)$ に関する帰納法により示す.

$\ell(w) = 0$ (i.e. $w = e$) のときは $P_{e,e}(q) = 1$ より成立している.

$\ell(w) = k - 1$ まで成立していると仮定し $\ell(w) = k$ のときを示す ($k \geq 1$).

$s \in W$, $sw < w$ とすると Th. 5.2.4 より

$$\begin{aligned} P_{x,w}(q) &= \begin{cases} qP_{x,sw}(q) + P_{sx,sw}(q) & \text{if } sx < x \\ P_{x,sw}(q) + qP_{sx,sw}(q) & \text{if } x < sx \end{cases} \\ &- \sum_{sy<y<sw} q^{\frac{\ell(w)-\ell(y)}{2}} \mu(y, sw) P_{x,y}(q) \end{aligned}$$

であるので

$$[1](P_{x,w}(q)) = P_{x,w}(0) = \begin{cases} P_{sx,sw}(0) & \text{if } sx < x, \\ P_{x,sw}(0) & \text{if } x < sx. \end{cases}$$

ここで, $x \leq w$, $sw < w$ であるので Prop. 3.3.4 より

$$\begin{aligned} &sx < x \Rightarrow sx \leq sw, \\ &x < sx \Rightarrow x \leq sw \end{aligned}$$

となっているので, 帰納法の仮定より

$$[1](P_{x,w}(q)) = 1$$

となり成立.
(ii) $x, w \in W$ に対して

$$P_{x,x}(q) = 1, \quad P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$$

であり, $x < w$ のときには

$$\deg P_{x,w}(q) \leq \frac{\ell(w) - \ell(x) - 1}{2}$$

となっているので

$$P_{x,w}(q) \in \mathbb{Z} \text{ if } \ell(w) - \ell(x) \leq 2.$$

よって $\ell(w) - \ell(x) \leq 2$, $x \leq w$ のときには (i) より

$$P_{x,w}(q) = [1](P_{x,w}(q)) = 1$$

となり成立. $\square$

Cor. 5.2.6 W: finite Coxeter group のとき $x \in W$ に対して

$$P_{x,w_0}(q) = P_{e,w_0}(q).$$

Proof:
w_0 は W の最長元より

$$sw_0 < w_0 \text{ for } \forall s \in S$$

であるので, $s_1 s_2 \ldots s_r$ を x の reduced expression とすると Th. 5.2.4-(ii) より

$$\begin{aligned} P_{x,w_0}(q) &= P_{s_1 x, w_0}(q) \\ &= P_{s_2 s_1 x, w_0}(q) \\ &= \ldots \\ &= P_{s_r \ldots s_2 s_1 x, w_0}(q) \\ &= P_{e,w_0}(q). \quad \square \end{aligned}$$

5.3 inverse Kazhdan-Lusztig polynomial

Def.-Prop. 5.3.1 (inverse Kazhdan-Lusztig polynomial) 次の (IKL1)-(IKL4) を満たす多項式の集合 $\{Q_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]; x, w \in W\}$ が一意的に存在する.

$$\begin{array}{ll} \text{(IKL1)} & Q_{x,x}(q) = 1 \text{ for } \forall x \in W. \\ \text{(IKL2)} & Q_{x,w}(q) = 0 \text{ if } x \not\leq w. \\ \text{(IKL3)} & \deg Q_{x,w}(q) \leq \frac{\ell(w)-\ell(x)-1}{2} \text{ if } x < w. \\ \text{(IKL4)} & q^{\ell(w)-\ell(x)}\overline{Q_{x,w}(q)} = \displaystyle\sum_{x \leq y \leq w} Q_{x,y}(q) R_{y,w}(q). \end{array}$$

$Q_{x,w}(q)$ は W の x, w に関する inverse Kazhdan-Lusztig polynomial と呼ばれる[21] .

Proof:
Kazhdan-Lusztig polynomial のときとほぼ同様に示せる. □

Th. 5.3.2 $x, w \in W$ に対して次が成立する.

$$\sum_{x \leq z \leq w} (-1)^{\ell(x)+\ell(z)} P_{x,z}(q) Q_{z,w}(q) = \delta_{x,w}.$$

Proof:
$x \not\leq w$ のときには両辺ともに 0 となり成立しているので $x \leq w$ のときのみ示すとよい.

$$D_{x,w} := \sum_{x \leq z \leq w} (-1)^{\ell(x)+\ell(z)} P_{x,z}(q) Q_{z,w}(q)$$

とおき $D_{x,w} = \delta_{x,w}$ となることを $\ell(w) - \ell(x)$ に関する帰納法により示す.
$\ell(w) - \ell(x) = 0$ (i.e. $x = w$) のとき

$$\begin{aligned} D_{x,x} &= \textstyle\sum_{x \leq z \leq x} (-1)^{\ell(x)+\ell(z)} P_{x,z}(q) Q_{z,x}(q) \\ &= (-1)^{\ell(x)+\ell(x)} P_{x,x}(q) Q_{x,x}(q) \\ &= 1 \\ &= \delta_{x,x}. \end{aligned}$$

[21] Kazhdan-Lusztig polynomial の条件と異なるのは (IKL4) のみである.

$\ell(w)-\ell(x)=k-1$ まで成立したと仮定し $\ell(w)-\ell(x)=k$ のときを示す $(k\geq 1)$.
まず, 帰納法の仮定を用いて $\overline{D_{x,w}}$ を計算する.

$$
\begin{aligned}
&\overline{D_{x,w}}\\
&=\sum_{x\leq z\leq w}(-1)^{\ell(x)+\ell(z)}\overline{P_{x,z}(q)}\ \overline{Q_{z,w}(q)}\\
&=\sum_{x\leq z\leq w}(-1)^{\ell(x)+\ell(z)}q^{\ell(x)-\ell(z)}\sum_{x\leq a\leq z}R_{x,a}(q)P_{a,z}(q)q^{\ell(z)-\ell(w)}\sum_{z\leq b\leq w}Q_{z,b}(q)R_{b,w}(q)\\
&=\sum_{x\leq a\leq z\leq b\leq w}(-1)^{\ell(x)+\ell(z)}q^{\ell(x)-\ell(w)}R_{x,a}(q)R_{b,w}(q)P_{a,z}(q)Q_{z,b}(q)\\
&=q^{\ell(x)-\ell(w)}\sum_{x\leq a\leq b\leq w}(-1)^{\ell(x)}R_{x,a}(q)R_{b,w}(q)\sum_{a\leq z\leq b}(-1)^{\ell(z)}P_{a,z}(q)Q_{z,b}(q)\\
&=q^{\ell(x)-\ell(w)}\sum_{x\leq a\leq b\leq w}(-1)^{\ell(x)+\ell(a)}R_{x,a}(q)R_{b,w}(q)D_{a,b}\\
&=q^{\ell(x)-\ell(w)}\sum_{x\leq a\leq b\leq w,\ell(b)-\ell(a)<k}(-1)^{\ell(x)+\ell(a)}R_{x,a}(q)R_{b,w}(q)D_{a,b}\\
&\quad+q^{\ell(x)-\ell(w)}(-1)^{\ell(x)+\ell(x)}R_{x,x}(q)R_{w,w}(q)D_{x,w}\\
&=q^{\ell(x)-\ell(w)}\sum_{x\leq a\leq b\leq w,\ell(b)-\ell(a)<k}(-1)^{\ell(x)+\ell(a)}R_{x,a}(q)R_{b,w}(q)\delta_{a,b}+q^{\ell(x)-\ell(w)}D_{x,w}\\
&=q^{\ell(x)-\ell(w)}\sum_{x\leq a\leq w}(-1)^{\ell(x)+\ell(a)}R_{x,a}(q)R_{a,w}(q)+q^{\ell(x)-\ell(w)}D_{x,w}\\
&=q^{\ell(x)-\ell(w)}\delta_{x,w}+q^{\ell(x)-\ell(w)}D_{x,w}\\
&=q^{\ell(x)-\ell(w)}D_{x,w}\quad(\because x<w).
\end{aligned}
$$

従って

$$\overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}D_{x,w}}=q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}D_{x,w}.$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}\ &=q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}D_{x,w}\\
&=q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}\sum_{x\leq z\leq w}(-1)^{\ell(z)+\ell(x)}P_{x,z}(q)Q_{z,w}(q)\\
&=\sum_{x\leq z\leq w}(-1)^{\ell(z)+\ell(x)}q^{\frac{\ell(x)-\ell(z)}{2}}P_{x,z}(q)q^{\frac{\ell(z)-\ell(w)}{2}}Q_{z,w}(q)\\
&=\sum_{x\leq z\leq w}(-1)^{\ell(z)+\ell(x)}q^{\frac{\ell(x)-\ell(z)}{2}}P_{x,z}(q)q^{\frac{\ell(z)-\ell(w)}{2}}Q_{z,w}(q)\\
&\in\mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}].\quad(\because x<w\ \text{と定義})
\end{aligned}
$$

他方

$$\text{左辺}=\overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}D_{x,w}}\in\mathbb{Z}^+[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}].$$

よって $\mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}]\cap\mathbb{Z}^+[q^{\frac{1}{2}},q^{-\frac{1}{2}}]=\{0\}$ より

$$q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}D_{x,w}=0.$$

即ち

$$D_{x,w} = 0 = \delta_{x,w}.$$

($x < w$ より $\delta_{x,w} = 0$ に注意)
従って帰納法により証明された. □

W が finite Coxeter group のときには次が成立している.

Prop. 5.3.3 W: finite Coxeter group のとき $x, w \in W$ に対して

$$Q_{x,w}(q) = P_{w_0w,w_0x}(q) = P_{ww_0,xw_0}(q).$$

Proof of Prop. 5.3.3:
$P_{w_0w,w_0x}(q) = P_{ww_0,xw_0}(q)$ は Prop. 5.1.6 より成立しているので $Q_{x,w}(q) = P_{w_0w,w_0x}(q)$ となることを示す.
$x \not\leq w$ のときには両辺ともに 0 となり成立.
$x \leq w$ のときを $\ell(w) - \ell(x)$ の帰納法により証明する.
$\ell(w) - \ell(x) = 0$ (i.e. $x = w$) のときは定義より両辺ともに 1 となり成立.
$\ell(w) - \ell(x) = k - 1$ まで成立していると仮定し $\ell(w) - \ell(x) = k$ のときを示す ($k \geq 1$).
定義と帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}
&\overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} Q_{x,w}(q)} - q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} Q_{x,w}(q) \\
&= q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{x \leq y < w} Q_{x,y}(q) R_{y,w}(q) \\
&= q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{x \leq y < w} P_{w_0y,w_0x}(q) R_{w_0w,w_0y}(q) \\
&= q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{w_0w < w_0y \leq w_0x} R_{w_0w,w_0y}(q) P_{w_0y,w_0x}(q) \\
&= q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} \sum_{w_0w < z \leq w_0x} R_{w_0w,z}(q) P_{z,w_0x}(q) \\
&= q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} (q^{\ell(w_0x)-\ell(w_0w)} \overline{P_{w_0w,w_0x}(q)} - P_{w_0w,w_0x}(q)) \\
&= q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} (q^{\ell(w)-\ell(x)} \overline{P_{w_0w,w_0x}(q)} - P_{w_0w,w_0x}(q)) \\
&= \overline{q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{w_0w,w_0x}(q)} - q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{w_0w,w_0x}(q).
\end{aligned}$$

従って

$$q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} Q_{x,w}(q), q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}} P_{w_0w,w_0x}(q) \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$$

であることに注意すると

$$Q_{x,w}(q) = P_{w_0w,w_0x}(q)$$

が成立する.
従って帰納法により証明された. □

Problem 7 Kazhdan-Lusztig polynomial で成立していたことと同様のことが, inverse Kazhdan-Lusztig polynomial ではどれだけ成立するのか, また成立しないのかを考えよ.

5.4 conjecures and results

Conjecture 5.4.1 (Kazhdan and Lusztig [10]) $x, w \in W$ に対して

$$[q^i](P_{x,w}(q)) \geq 0 \text{ for } i \in \mathbb{N}.$$

Rem. 5.4.2 $W = I_2(m)$ がのときには Ex. 5.1.4 より $x, w \in W$, $x \leq w$ に対して $P_{x,w}(q) = 1$ であるので Conjecture 5.4.1 は成立している. また, $i = 0$ のときには Cor. 5.2.5-(i) で成立が示されている.

この予想に関しては次のことがこれまでに証明されてきた.

Fact 5.4.3 次の場合には Conjecture 5.4.1 の成立は証明されている.

(i) W: finite Weyl group, affine Weyl group (by Kazhdan and Lusztig [11] (1980)).
(ii) W: H_3, H_4 型 Coxeter group (by Alvis [1] (1987))[22] .
(iii) W: crystallographic Coxeter group (by Haddad [8] (1984)).
(iv) $x, w \in W$, $\ell(w) - \ell(x) \leq 4$ (by Dyer [6] (1987)).
(v) $i = 1$ (by T [13] (1995), Dyer [7] (1997)).

Conjecture 5.4.4 $x, w, x', w' \in W$ に対して $[x, w] \simeq [x', w']$ のとき

$$P_{x,w}(q) = P_{x',w'}(q).$$

Rem. 5.4.5 $x, w \in W$, $x \leq w$ に対して $\ell(w) - \ell(x) \leq 2$ のときには区間は全て同型であることが知られている. 従って Cor. 5.2.5-(ii) より $\ell(w) - \ell(x) \leq 2$ のときには Conjecture 5.4.4 は成立している.
また, Dyer は [6] において, $\ell(w) - \ell(x) \leq 4$ のときのこの予想の成立を示している.

[22] コンピュータによる計算.

一般に Kazhdan-Lusztig polynomial は次のようにも表せることが知られている.

Th. 5.4.6 (Brenti [4]) $P = \sum_{i=0}^{d} a_i q^i \in \mathbb{Z}[q]$, $j \in \mathbb{R}$(実数) に対して

$$U_j(P) := \sum_{i \in [0,d], j \le i} a_i q^i$$

とおき, $r \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{r+1} \in W$, $a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_{r+1}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_{(a_0,a_1,\ldots,a_{r+1})}(q) \\
&:= \begin{cases} (-1)^{\ell(a_1)-\ell(a_0)} R_{a_0,a_1}(q) & \text{if } r = 0, \\ \mathcal{R}_{(a_0,a_1)}(q) U_{\frac{\ell(a_{r+1})-\ell(a_1)+1}{2}}\left(q^{\ell(a_{r+1})-\ell(a_1)} \overline{\mathcal{R}_{(a_1,a_2,\ldots,a_{r+1})}(q)}\right) & \text{if } r \ge 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

とおく.
このとき $x, w \in W$, $x \le w$ に対して

$$P_{x,w}(q) = \sum_{C \in \mathcal{M}(x,w)} \mathcal{R}_C(q).$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}(x,w) \\
&:= \cup_{r \ge 0} \{(a_0, a_1, \ldots, a_{r+1}) \in W^{r+2}; x = a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_{r+1} = w\}.
\end{aligned}$$

これを用いると $[q](P_{x,w}(q))$, $[q^2](P_{x,w}(q))$ は次のように表せることがわかる.

Th. 5.4.7 (Brenti [4]) $x, w \in W$ に対して

(i)

$$[q](P_{x,w}(q)) = c_1(x,w) + (-1)^{\ell(w)-\ell(x)} [q](R_{x,w}(q))$$

(ii)

$$\begin{aligned}
[q^2](P_{x,w}(q)) = \quad & (-1)^{\ell(w)-\ell(x)} [q^2](R_{x,w}(q)) - c_2(x,w) \\
& + \sum_{y \in C_1(x,w)} [q](P_{x,y}(q)) + \sum_{y \in C_3(x,w)} [q](P_{y,w}(q)).
\end{aligned}$$

Rem. 5.4.8 (i) Th. 5.4.6, Th. 5.4.7 の inverse Kazhdan-Lusztig polynomial version も存在している. また $[q](Q_{x,w}(q)) \ge 0$ は Dyer [7] により示されている.

(ii) Prop. 4.2.9-(ii), Th. 5.4.7-(i) より $x, w \in W$, $x \leq w$, $\ell(w) = \ell(x) + \ell(x^{-1}w)$ のときには

$$[q](P_{x,w}(q)) = c_1(x,w) - g(x^{-1}w)$$

であり, 特に

$$[q](P_{e,w}(q)) = c_1(e,w) - g(w) = c(w) - g(w)$$

と表せる.
従って[23], Prop. 3.6.5 より

$$[q](P_{e,w}(q)) \geq 0$$

が即座にわかる[24].

[23] 先にも述べたように $[q](P_{x,w}(q)) \geq 0$ は一般に示されている.
[24] この結果 (i.e. $P_{e,w}(q) \geq 0$) は最初に Dyer [6] によって示された.

6 Appendix

6.1 対称群の生成系

この節では次の証明方針を簡単に述べることを目的とする.

Th. 6.1.1 $n \geq 2, i \in [n-1]$ に対して $\sigma_i \in S_n$ を

$$\sigma_i := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & i+2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & i & i+2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

とおく (この形の置換は隣接互換と呼ばれる).
このとき $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ は S_n の生成系となる.

まず, 巡回置換の定義からはじめる.

Def. 6.1.2 $1 \leq r \leq n$ とする.

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{r-1} & i_r & \text{他は動かさない} \\ i_2 & i_3 & i_4 & \cdots & i_r & i_1 & \end{pmatrix} \in S_n$$

の形の元を長さ r の巡回置換と呼び, $(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ と書く.

Ex. 6.1.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1,2,4) = (2,4,1) = (4,1,2)$$

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1) = (2) = (3) = (1)(2) = \dots$$

注意: 長さ 1 の巡回置換は単位元に等しいので, 書かなくても同じである.

Def. 6.1.4 巡回置換 $\sigma = (i_1, i_2, \cdots, i_r), \tau = (j_1, j_2, \cdots, j_s)$ に対して,

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\} \cap \{j_1, j_2, \cdots, j_s\} = \phi$$

のとき, σ と τ は互いに素と言う.

Lem. 6.1.5 任意の置換 (i.e. 対称群の元) は互いに素な巡回置換の積に書ける.

Ex. 6.1.6 (i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = (1,6,2)(3,8,7) = (1,6,2)(3,8,7)(4)(5).$$

(ii)

$$S_3 = \{(1),(2,3),(1,2),(1,2,3),(1,3,2),(1,3)\}.$$

Proof of Lem. 6.1.5:
$\sigma \in S_n$ に対して

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & i_1 & i_2 & \cdots & i_r & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-r} \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & 1 & \sigma(j_1) & \sigma(j_2) & \cdots & \sigma(j_{n-r}) \end{pmatrix} \\ &= (1,i_1,i_2,\cdots,i_r) \begin{pmatrix} 1 & i_1 & \cdots & i_r & j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-r} \\ 1 & i_1 & \cdots & i_r & \sigma(j_1) & \sigma(j_2) & \cdots & \sigma(j_{n-r}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるので, $[n]$ の中を動く元の数 (i.e. $\sharp\{i \in [n]; \sigma(i) \neq i\}$) に関する帰納法により成立. □

Lem. 6.1.7 巡回置換 $(i_1, i_2, \cdots, i_r)$ に対して次が成立する.

$$(i_1,i_2,\cdots,i_r) = (i_1,i_r)(i_1,i_{r-1})(i_1,i_{r-2})\cdots(i_1,i_2) = (i_1,i_2)(i_2,i_3)\cdots(i_{r-1},i_r).$$

Proof:
証明は

$$(i_1,i_2,\cdots,i_r) = (i_1,i_r)(i_1,i_2,\cdots,i_{r-1}) = (i_1,i_2)(i_2,i_3,\cdots,i_r)$$

であるので r に関する帰納法より容易. □

Def. 6.1.8 (i,j) の形の巡回置換 (i.e. 長さ 2 の巡回置換) を互換と呼ぶ.
特に隣接互換 $\sigma_i = (i, i+1)$ も互換である

Prop. 6.1.9 $n \geq 2$ のとき, S_n の任意の置換は互換の積に書ける. ただし書き方は一意とは限らない.

Proof:
Lem. 6.1.5, Lem. 6.1.7 より問題となるのは単位元のみ. $e = (1) = (1,2)(1,2)$ より o.k. □

Proof of Th. 6.1.1:
Prop. 6.1.9 より任意の互換が隣接互換でかけることを示すとよい. $i < j$ とすると

$$(i,j) = (i,i+1)(i+1,j)(i,i+1)$$

であるので, あとは $j - i$ に関する帰納法を用いると容易. □

6.2 exchange condition

この節では次を示すことを目的とする.

Th. 6.2.1 (exchange condition) $s \in S$, $w = s_1 s_2 \cdots s_k \in W$ $(s_1, s_2, \ldots, s_k \in S)$ に対して

$$\ell(sw) \leq \ell(w) \Rightarrow \exists j \in [k] \text{ s.t. } s s_1 s_2 \cdots s_{j-1} = s_1 s_2 \cdots s_j.$$

(i.e. $\ell(sw) \leq \ell(w) \Rightarrow \exists j \in [k]$ s.t. $sw = s_1 s_2 \cdots \widehat{s_j} \cdots s_k$.)
注: $\ell(w) = k$ とは限らない.

まず補題を 2 つ示す. そのために, 記号を準備する.

Def. 6.2.2 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_k) \in S^k$, $j \in [k]$, $t \in T$ に対して

$$\begin{aligned} t_j &:= s_1 s_2 \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_2 s_1 \in T, \\ \Phi(\mathbf{s}) &:= (t_1, t_2, \cdots, t_k), \\ n(\mathbf{s}, t) &:= \sharp\{j \in [k]; t_j = t\} \end{aligned}$$

とする.
また

$$\begin{aligned} R &:= \{1, -1\} \times T, \\ \mathrm{Bij}(R) &:= R \text{ から } R \text{ への全単射全体の集合} \end{aligned}$$

とおき, $s \in S$ に対して $U_s : R \to R$ を

$$U_s(\varepsilon, t) := (\varepsilon(-1)^{\delta_{s,t}}, sts)$$

とおく.

Ex. 6.2.3 $(W,S)=(S_3,\{s_1,s_2\})$, $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_1)$ のとき

$$\Phi(\mathbf{s})=(s_1,s_1s_2s_1,s_1s_2s_1s_2s_1=s_2),\quad n(\mathbf{s},s_1)=1.$$

まず, 次が成立する.

Lem. 6.2.4 (i) ${U_s}^2=id.$ 従って, 特に $U_s\in\mathrm{Bij}(R)$.
(ii) $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\cdots,s_k)\in S^k$ に対して

$$\begin{array}{ll} w & := s_ks_{k-1}\cdots s_1, \\ U_{\mathbf{s}} & := U_{s_k}U_{s_{k-1}}\cdots U_{s_1} \end{array}$$

とおくと,

$$U_{\mathbf{s}}(\varepsilon,t)=(\varepsilon(-1)^{n(\mathbf{s},t)},wtw^{-1}).$$

(iii) $m(s,s')\neq\infty$ である $s,s'\in S$ に対して

$$(U_sU_{s'})^{m(s,s')}=id.$$

(iv) $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\cdots,s_m)\in S^m$, $\mathbf{s}'=(s'_1,s'_2,\cdots,s'_n)\in S^n$, $t\in T$ に対して

$$s_1s_2\cdots s_m=s'_1s'_2\cdots s'_n\Rightarrow n(\mathbf{s},t)\equiv n(\mathbf{s}',t)\bmod 2.$$

従って, $\eta:W\times T\to\{1,-1\}$ を

$$\eta(s_1s_2\ldots s_m,t):=(-1)^{n((s_1,s_2,\ldots,s_m),t)}$$

で定義できる.

Proof:
(i) U_s の定義より

$$\begin{array}{ll} U_s^2(\varepsilon,t) & =U_s(\varepsilon(-1)^{\delta_{s,t}},sts) \\ & =(\varepsilon(-1)^{\delta_{s,t}}(-1)^{\delta_{s,sts}},s(sts)s) \\ & =(\varepsilon(-1)^{\delta_{s,t}+\delta_{s,sts}},t) \\ & =(\varepsilon(-1)^{\delta_{s,t}+\delta_{e,ts}},t) \\ & =(\varepsilon(-1)^{\delta_{s,t}+\delta_{s,t}},t) \\ & =(\varepsilon,t) \end{array}$$

となるので $U_s^2=id$ が成立.
(ii) k に関する帰納法により示す.

$k=1$ のとき
$\mathbf{s}=\Phi(\mathbf{s})=(s_1)$, $w=s_1(=w^{-1})$ であるので

$$n(\mathbf{s},t)=\delta_{s_1,t}.$$

従って,

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{s}}(\varepsilon,t) &= U_{s_1}(\varepsilon,t) \\ &= (\varepsilon(-1)^{\delta_{s_1,t}}, s_1ts_1) \\ &= (\varepsilon(-1)^{n(\mathbf{s},t)}, wtw^{-1}) \end{aligned}$$

となり成立.
$k-1$ まで成立したと仮定し k のときを示す $(k\geq 2)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' &:= (s_1,s_2,\cdots,s_{k-1}), \\ w' &:= s_{k-1}s_{k-2}\cdots s_1 \end{aligned}$$

とおくと, 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{s}}(\varepsilon,t)=U_{s_k}U_{\mathbf{s}'}(\varepsilon,t) &= U_{s_k}(\varepsilon(-1)^{n(\mathbf{s}',t)}, w'tw'^{-1}) \\ &= (\varepsilon(-1)^{n(\mathbf{s}',t)}(-1)^{\delta_{s_k,w'tw'^{-1}}}, s_kw'tw'^{-1}s_k) \\ &= (\varepsilon(-1)^{n(\mathbf{s}',t)+\delta_{s_k,w'tw'^{-1}}}, wtw^{-1}). \end{aligned}$$

$\Phi(\mathbf{s})=(\Phi(\mathbf{s}'), w'^{-1}s_kw')$ より

$$\begin{aligned} n(\mathbf{s},t) &= n(\mathbf{s}',t)+\delta_{w'^{-1}s_kw',t} \\ &= n(\mathbf{s}',t)+\delta_{s_k,w'tw'^{-1}} \end{aligned}$$

であるので,

$$U_{\mathbf{s}}(\varepsilon,t)=(\varepsilon(-1)^{n(\mathbf{s},t)}, wtw^{-1}).$$

従って, 帰納法により (ii) が成立する.
(iii) $p=ss'$, $m=m(s,s')$ とおき,

$$\begin{aligned} s_i &:= \begin{cases} s' & \text{if } i\text{: odd} \\ s & \text{if } i\text{: even} \end{cases} \\ \mathbf{s} &:= (s_1,s_2,\ldots,s_{2m}) \end{aligned}$$

とおく (i.e. $\mathbf{s}=(s',s,s',s,\ldots,s',s)$).
このとき, $j\in[2m]$ に対して,

$$\begin{aligned} t_j &= s_1s_2\cdots s_{j-1}s_js_{j-1}\cdots s_1 \\ &= s'(ss'ss'\cdots ss') \\ &= s'(ss')^{j-1} \\ &= s'p^{j-1} \end{aligned}$$

であるので

$$(t_1, t_2, \cdots, t_{2m}) = (s', s'p, s'p^2, \cdots, s'p^{2m-1}).$$

ここで $p^m = e$ より

$$(t_1, t_2, \cdots, t_{2m}) = (s', s'p, s'p^2, \cdots, s'p^{m-1}, s', s'p, s'p^2, \cdots, s'p^{m-1}).$$

$t_1, t_2, \ldots, t_m$ はすべて異なり,

$$t_j = t_{m+j} \text{ for } \forall j \in [m].$$

よって, $t \in T$ に対して $n(\mathbf{s}, t) = 0$ or 2 であるので

$$(-1)^{n(\mathbf{s},t)} = 1.$$

従って

$$w := s_{2m} s_{2m-1} \cdots s_1 = (ss')^m (= e)$$

とおくと, (ii) より

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{s}}(\varepsilon, t) &= (\varepsilon(-1)^{n(\mathbf{s},t)}, wtw^{-1}) \\ &= (\varepsilon, t). \end{aligned}$$

故に, $U_{\mathbf{s}} = (U_s U_{s'})^m = id$ となるので (iii) が成立する.
(iv) $\varphi : S \to \mathrm{Bij}(R)$ を

$$\varphi(s) := U_s$$

で定義する (well defined は (i) より o.k.).
このとき, $m(s, s') \neq \infty$ である $s, s' \in S$ に対して, (iii) より

$$(\varphi(s)\varphi(s'))^{m(s,s')} = id$$

となっている.
従って Prop. 2.1.4 より $\widetilde{\varphi} : W \to \mathrm{Bij}(R)$ を
$h_1, h_2, \ldots, h_r \in S$ に対して

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(h_1 h_2 \ldots h_r) : &= \varphi(h_1)\varphi(h_2) \cdots \varphi(h_r) \\ (&= U_{h_1} U_{h_2} \cdots U_{h_r}) \end{aligned}$$

で定義できる.
よって $s_m s_{m-1} \ldots s_1 = s'_n s'_{n-1} \ldots s'_1 (=: w)$ より

$$\begin{aligned}(\varepsilon(-1)^{n(\mathbf{s},t)}, wtw^{-1}) &= U_{\mathbf{s}}(\varepsilon, t) \\ &= U_{s_m} U_{s_{m-1}} \cdots U_{s_1}(\varepsilon, t) \\ &= \widetilde{\varphi}(s_m s_{m-1} \ldots s_1)(\varepsilon, t) \\ &= \widetilde{\varphi}(s'_n s'_{n-1} \ldots s'_1)(\varepsilon, t) \\ &= (\varepsilon(-1)^{n(\mathbf{s}',t)}, wtw^{-1})\end{aligned}$$

即ち,

$$(-1)^{n(\mathbf{s},t)} = (-1)^{n(\mathbf{s}',t)}.$$

従って,

$$n(\mathbf{s}, t) \equiv n(\mathbf{s}', t) \bmod 2$$

となり成立する. □

Lem. 6.2.5 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_k) \in S^k$, $w = s_1 s_2 \cdots s_k$ に対して

$$H_w := \{t \in T; \eta(w, t) = -1\}$$

とおく $(\eta(s_1 s_2 \ldots s_m, t) = (-1)^{n((s_1, s_2, \ldots, s_m), t)}$.
このとき, 次が成立する.

(i) $H_w \subseteq \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$, $\sharp H_w \leq \ell(w)$.
(ii)

$$\begin{aligned} & w = s_1 s_2 \cdots s_k\text{: reduced expression} \\ & \Leftrightarrow \sharp H_w = k \\ (& \Leftrightarrow H_w = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}, \text{各 } t_i \text{ はすべて異なる.}) \end{aligned}$$

Proof:
(i) H_w の定義より

$$\begin{aligned} t \in H_w &\Rightarrow \eta(w, t) = -1 \\ &\Rightarrow (-1)^{n(\mathbf{s},t)} = -1 \\ &\Rightarrow n(\mathbf{s}, t) \neq 0 \\ &\Rightarrow \exists j \in [k] \text{ s.t. } t = t_j \\ &\Rightarrow t \in \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}. \end{aligned}$$

よって $H_w \subseteq \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ が成立する.
特に $w = s_1 s_2 \cdots s_k$ が reduced expression であったとすると, $\ell(w) = k$ であるので, 先の式より

$$\sharp H_w \leq \ell(w).$$

(ii) $\Rightarrow$) $\sharp H_w \neq k$ と仮定すると (i) より $\sharp H_w < k$ となるので, 次の (a) or (b) の場合が考えられる.

(a) $\exists i, j \in [k]$ s.t. $i < j$, $t_i = t_j$.
(b) $\sharp\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} = k$, $\exists i \in [k]$ s.t. $t_i \notin H_w$.

(a) のとき.
t_i, t_j の定義より,

$$\begin{aligned} s_1 s_2 \cdots s_{i-1} s_i s_{i-1} \cdots s_2 s_1 &= s_1 s_2 \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_2 s_1 \\ s_i &= s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_{i+1} s_i \\ s_{i+1} s_{i+2} \cdots s_j &= s_i s_{i+1} \cdots s_{j-1}. \end{aligned}$$

即ち,

$$\begin{aligned} w &= s_1 \cdots s_{i-1} (s_i \cdots s_{j-1}) s_j \cdots s_k \\ &= s_1 \cdots s_{i-1} (s_{i+1} \cdots s_j) s_j \cdots s_k \\ &= s_1 \cdots s_{i-1} s_{i+1} \cdots s_{j-1} s_{j+1} \cdots s_k \end{aligned}$$

となり, $s_1 s_2 \cdots s_k$ が w の reduced expression であることに反する.
(b) のとき.

$$\begin{aligned} t_i \notin H_w &\Rightarrow \eta(w, t_i) \neq -1 \\ &\Rightarrow \eta(w, t_i) = 1 \\ &\Rightarrow n(w, t_i) \neq 1. \end{aligned}$$

$n(w, t_i)$ の定義より, $n(w, t_i) \geq 1$ であるので

$$n(w, t_i) \geq 2.$$

これは $\sharp\{t_1, t_2, \ldots, t_k\} = k$ に反する.
従って, どちらの場合にも矛盾が生じるので,

$$\sharp H_w = k.$$

$\Leftarrow$) (i) より,

$$k = \sharp H_w \leq \ell(w) = \ell(s_1 s_2 \cdots s_k) \leq k.$$

よって, $s_1 s_2 \cdots s_k$ は w の reduced expression である. □

Proof of Th. 6.2.1:
$\ell(w) = r$ とすると, $\ell(sw) \leq \ell(w)$ より,

$$\ell(sw) = \ell(w) - 1 = r - 1.$$

$s'_1 s'_2 \cdots s'_{r-1}$ を sw の reduced expression の一つとし,

$$\mathbf{s}' = (s, s'_1, s'_2, \cdots, s'_{r-1}), \Phi(\mathbf{s}') = (t'_1, t'_2, \ldots, t'_r)$$

とおく.
このとき, $ss'_1 \cdots s'_{r-1}$ は w の reduced expression となっているので, Lem. 6.2.5-(ii) より

$$\sharp\{t'_1, t'_2, \cdots, t'_r\} = r.$$

よって, $t'_1 = s$ より

$$n(\mathbf{s}', s) = 1. \tag{17}$$

他方, $w = s_1 s_2 \cdots s_k = ss'_1 \cdots s'_{r-1}$ であるので,

$$\mathbf{s} := (s_1, s_2, \cdots, s_k)$$

とおくと, Lem. 6.2.4-(iv) より

$$n(\mathbf{s}, s) \equiv n(\mathbf{s}', s) \bmod 2.$$

従って, (17) より,

$$n(\mathbf{s}, s) \neq 0.$$

即ち,

$$\exists j \in [k] \text{ s.t. } s = t_j (= s_1 s_2 \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_2 s_1)$$

故に,

$$ss_1 s_2 \cdots s_{j-1} = s_1 s_2 \cdots s_{j-1} s_j$$

となり成立する. □

6.3 (C3)' and exchange condition

ここでは次を示すことを目的とする.

Th. 6.3.1 (C3)' と exchange condition は同値である.
i.e. (C1), (C2) を満たす pair (W,S) に対して

(W,S) が (C3)' を満たす $\Leftrightarrow$ (W,S) が exchange condition を満たす.

Lem. 6.3.2 (W,S): (C1), (C2) と exchange condition を満たす pair とし, G: 群とする.

(i) $w \in W$, $\ell(w) = r \geq 1$ に対して

$$D_w := \{(s_1, s_2, \ldots, s_r) \in S^r ; w = s_1 s_2 \ldots s_r\}$$

とおき f_w を D_w から G への写像とする.
さらに

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r),\ \mathbf{s}' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_r) \in D_w$$

が次の (a) or (b) の条件を満たすときには

$$f_w(\mathbf{s}) = f_w(\mathbf{s}')$$

が成立しているものとする.
(a) $s_1 = s'_1$ or $s_r = s'_r$.
(b) $\exists s, s' \in S$ s.t.

$$s_i = \begin{cases} s & \text{if } i\text{: odd,} \\ s' & \text{if } i\text{: even,} \end{cases} \quad s'_i = \begin{cases} s' & \text{if } i\text{: odd,} \\ s & \text{if } i\text{: even.} \end{cases}$$

i.e. $\mathbf{s} = (s, s', s, s', \ldots)$, $\mathbf{s}' = (s', s, s', s, \ldots)$.
このとき

$$\exists x \in G \text{ s.t. } f_w(\mathbf{s}) = x \text{ for } \forall \mathbf{s} \in D_w.$$

(ii) $f : S \to G$ は次を満たす写像とする.
$\mathrm{ord}(st) \neq \infty$ となる $s, t \in S$ に対して

$$(f(s)f(t))^{\mathrm{ord}(st)} = e_G.$$

このとき $F : W \to G$ を

$$F(w) := f(s_1)f(s_2)\ldots f(s_r) \text{ if } w = s_1 s_2 \ldots s_r\text{: reduced expression}$$

で定義できる (e_G は G の単位元とする).

(iii) $s \in S$, $w \in W$, $(s_1, s_2, \dots, s_r) \in D_w$ に対して次の (A) or (B) のどちらかが必ず成立している.

(A) $\ell(sw) = \ell(w) + 1$, $(s, s_1, \dots, s_r) \in D_{sw}$.

(B) $\ell(sw) = \ell(w) - 1$, $\exists j \in [r]$ s.t. $(s_1, s_2, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_r) \in D_{sw}$.

Proof:

(i) まず $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_r), \mathbf{s}' = (s_1', s_2', \dots, s_r') \in D_w$ に対して

$$\mathbf{s}'' := (s_1, s_1', s_2', \dots, s_{r-1}')$$

とおくと

$$f_w(\mathbf{s}) \neq f_w(\mathbf{s}') \Rightarrow \mathbf{s}'' \in D_w, f_w(\mathbf{s}') \neq f_w(\mathbf{s}'') \tag{18}$$

となっていることを示す.

$\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in D_w$ より

$$w = s_1 s_2 \dots s_r = s_1' s_2' \dots s_r' \text{: reduced expression.}$$

従って $\ell(s_1 w) \leq \ell(w)$ であるので exchange condition より

$$\exists j \in [r] \text{ s.t. } w = s_1 s_1' \dots \widehat{s_j'} \dots s_r'.$$

$j \in [r-1]$ のときには (a) より

$$f_w(\mathbf{s}) = f_w(s_1, s_1', \dots, \widehat{s_j'}, \dots, s_r') = f_w(\mathbf{s}')$$

となり仮定に矛盾するので

$$w = s_1 s_1' \dots s_{r-1}'.$$

従って

$$\mathbf{s}'' = (s_1, s_1', \dots, s_{r-1}') \in D_w.$$

さらに (a) より

$$f_w(\mathbf{s}'') = f_w(\mathbf{s}) \neq f_w(\mathbf{s}')$$

となるので (18) が示された.

次に

$$\exists \mathbf{s}, \mathbf{s}' \in D_w \text{ s.t. } f_w(\mathbf{s}) \neq f_w(\mathbf{s}')$$

と仮定し, (18) を用いて矛盾を導く.
$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r), \mathbf{s}' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_r)$ とし,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_0 &:= (s_1, s_2, \ldots, s_r)\ (= \mathbf{s}),\\
\mathbf{s}_1 &:= (s'_1, s'_2, \ldots, s'_r)\ (= \mathbf{s}'),\\
\mathbf{s}_2 &:= (s_1, s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r-1}),\\
\mathbf{s}_3 &:= (s'_1, s_1, s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r-2}),\\
\mathbf{s}_4 &:= (s_1, s'_1, s_1, s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r-3}),\\
\vdots\ & \quad \vdots\\
\mathbf{s}_i &:= \begin{cases} (s_1, s'_1, \ldots, s_1, s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r-i+1}) & \text{if } i\text{: even},\\ (s'_1, s_1, \ldots, s_1, s'_1, s'_2, \ldots, s'_{r-i+1}) & \text{if } i\text{: odd},\end{cases}\\
\vdots\ & \quad \vdots\\
\mathbf{s}_r &:= \begin{cases} (s_1, s'_1, s_1, s'_1, \ldots, s'_1) & \text{if } r\text{: even},\\ (s'_1, s_1, s'_1, s_1, \ldots, s'_1) & \text{if } r\text{: odd},\end{cases}\\
\mathbf{s}_{r+1} &:= \begin{cases} (s'_1, s_1, s'_1, s_1, \ldots, s_1) & \text{if } r\text{: even},\\ (s_1, s'_1, s_1, s'_1, \ldots, s_1) & \text{if } r\text{: odd}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

とおく.
Ex. $r = 5$ のときは

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_0 &= (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5),\\
\mathbf{s}_1 &= (s'_1, s'_2, s'_3, s'_4, s'_5),\\
\mathbf{s}_2 &= (s_1, s'_1, s'_2, s'_3, s'_4),\\
\mathbf{s}_3 &= (s'_1, s_1, s'_1, s'_2, s'_3),\\
\mathbf{s}_4 &= (s_1, s'_1, s_1, s'_1, s'_2),\\
\mathbf{s}_5 &= (s'_1, s_1, s'_1, s_1, s'_1),\\
\mathbf{s}_6 &= (s_1, s'_1, s_1, s'_1, s_1).
\end{aligned}
$$

このとき $f_w(\mathbf{s}_0) \neq f_w(\mathbf{s}_1)$ であるので (18) を繰り返し用いることにより

$$f_w(\mathbf{s}_r) \neq f_w(\mathbf{s}_{r+1})$$

となり (b) に矛盾する.
よって (i) の成立が示された.
(ii) $w \in W$, $\ell(w) = r \geq 1$ とする. $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r) \in D_w$ に対して $F_w : D_w \to G$ を

$$F_w(\mathbf{s}) := f(s_1)f(s_2)\ldots f(s_r)$$

で定義する.
このとき

$$\exists x \in G \text{ s.t. } F_w(\mathbf{s}) = x \text{ for } \forall \mathbf{s} \in D_w \tag{19}$$

となることを言うとよい.
(19) を $\ell(w)$ に関する帰納法で示す.
$\ell(w)=1$ のときには $\sharp D_w=1$ であるので成立している.
$\ell(w)=r-1$ まで成立したと仮定し, $\ell(w)=r$ のときを示す $(r\geq 2)$.
(i) より $\mathbf{s}=(s_1,s_2,\dots,s_r), \mathbf{s}'=(s'_1,s'_2,\dots,s'_r)\in D_w$ に対して

$$s_1=s'_1 \text{ or } s_r=s'_r \text{ or } \exists s,s'\in S \text{ s.t. } \mathbf{s}=(s,s',s,\dots),\ \mathbf{s}'=(s',s,s',\dots)$$

のときに $F_w(\mathbf{s})=F_w(\mathbf{s}')$ となることを示すとよい.
Case 1. $s_1=s'_1$ のとき. 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} F_w(\mathbf{s}) &= f(s_1)F_{s_1w}(s_2,s_3,\dots,s_r) \\ &= f(s'_1)F_{s_1w}(s'_2,s'_3,\dots,s'_r) \\ &= F_w(\mathbf{s}'). \end{aligned}$$

Case 2. $s_r=s'_r$ のとき. 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} F_w(\mathbf{s}) &= F_{ws_r}(s_1,s_2,\dots,s_{r-1})f(s_r) \\ &= F_{ws_r}(s'_1,s'_2,\dots,s'_{r-1})f(s'_r) \\ &= F_w(\mathbf{s}'). \end{aligned}$$

Case 3. $\exists s,s'\in S$ s.t. $\mathbf{s}=(s,s',s',\dots),\mathbf{s}'=(s',s,s',\dots)$ のとき.
$s=s'$ のときは $\mathbf{s}=\mathbf{s}'$ であるので $F_w(\mathbf{s})=F_w(\mathbf{s}')$ は成立.
$s\neq s'$ のときには $s^2=s'^2=e$, $\mathbf{s},\mathbf{s}'\in D_w$ より

$$(ss')^r=e,\quad \mathrm{ord}(ss')=r.$$

従って (ii) の f が満たすべき条件より

$$(f(s)f(s'))^r=e_G.$$

さらに $f(s)^2=f(s')^2=e_G$ であるので

$$F_w(\mathbf{s})=f(s)f(s')f(s)\dots=f(s')f(s)f(s')\dots=F_w(\mathbf{s}').$$

故に (ii) が成立する.
(iii) Lem. 2.2.4-(iv) の証明を再考すると

$$\ell(w)-1\leq \ell(sw)\leq \ell(w)+1 \tag{20}$$

は (C3)' の条件がなくても成立していることがわかる.
従って $\ell(sw)>\ell(w)$ のときには (20) より

$$\ell(sw)=\ell(w)+1,\ (s,s_1,\dots,s_r)\in D_{sw}.$$

$\ell(sw) \leq \ell(w)$ のときには exchange condition より

$$\exists j \in [r] \text{ s.t. } sw = s_1 \dots \widehat{s_j} \dots s_r$$

となるので (20) より

$$\ell(sw) = r - 1 = \ell(w) - 1, \ (s_1, s_2, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_r) \in D_{sw}.$$

よって (iii) が成立する. □

Proof of Th. 6.3.1:
(C3)' ⇒ exchange condition を満たすのは既に示したので, 逆を示す.
G: 群 (単位元を e_G とする), f: 次を満たす S から G への写像とする.
$\mathrm{ord}(st) \neq \infty$ となる $s, t \in S$ に対して

$$(f(s)f(t))^{\mathrm{ord}(st)} = e_G.$$

このとき Lem. 6.3.2-(ii) より $F : W \to G$ を

$$F(w) := f(s_1)f(s_2)\dots f(s_r) \text{ if } w = s_1 s_2 \dots s_r\text{: reduced expression} \quad (21)$$

で定義できる.
実はこの F に関しては次のことが成立している.

$$F(sw) = F(s)F(w) \text{ for } \forall s \in S, \forall w \in W.$$

($\because$ $(s_1, s_2, \dots, s_r) \in D_w$ とすると Lem. 6.3.2-(iii) より次の (A) or (B) のどちらかである.

(A) $\ell(sw) = \ell(w) + 1$, $(s, s_1, \dots, s_r) \in D_{sw}$.
(B) $\ell(sw) = \ell(w) - 1$, $\exists j \in [r]$ s.t. $(s_1, s_2, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_r) \in D_{sw}$.

(A) のときは (21) より

$$F(sw) = f(s)f(s_1)\dots f(s_r) = f(s)F(w) = F(s)F(w)$$

となり成立.
(B) のときは $(s, s_1, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_r) \in D_w$ であるので

$$F(w) = f(s)F(sw).$$

ここで $f(s)^2 = e_G$ より

$$F(sw) = f(s)F(w) = F(s)F(w)$$

となり成立.)
従って $s_1, s_2, \ldots, s_r \in S$ に対して

$$F(s_1 s_2 \ldots s_r) = f(s_1) f(s_2) \ldots f(s_r)$$

で定義できる.
よって (C3)' が成立する. □

6.4 generic algebra

Def. 6.4.1 (W, S): Coxeter system. A: 1 をもつ可換環に対して

$$\mathcal{E}\text{: 自由 } A\text{-加群 with basis } \{T_w; w \in W\}$$

とおく.
i.e. $\mathcal{E}$ は次を満たす A の作用[25] が定義された加群で, 集合としては

$$\mathcal{E} = \{ \sum_{w \in W} a_w T_w \text{ (有限和)}; a_w \in A \text{ for } w \in W \}$$

である.

$a(x+y) = ax + ay, (a+b)x = ax + bx, (ab)x = a(bx), 1x = x$
for $a, b \in A$, $x, y \in \mathcal{E}$.

この節での目的は次を示すことである.

Th. 6.4.2 $a_s, b_s \in A$ $(s \in S)$ は次を満たす parameter とする.

$$a_s = a_{s'}, b_s = b_{s'} \text{ if } s \text{ と } s' \text{ は共役}^{26} .$$

このとき $\mathcal{E}$ には次を満たす結合的 A-代数の構造が一意的に入る.
$w \in W$, $s \in S$ に対して

$$T_e T_w = T_w T_e = T_w \tag{22}$$
$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{if } \ell(w) < \ell(sw), \\ a_s T_w + b_s T_{sw} & \text{if } \ell(w) > \ell(sw). \end{cases} \tag{23}$$

[25] i.e. $A \times \mathcal{E}$ から $\mathcal{E}$ への写像. ここでは単に ax $(a \in A,\ x \in \mathcal{E})$ で表す.
[26] i.e. $\exists w \in W$ s.t. $s = ws'w^{-1}$.

i.e. $\mathcal{E}$ には上の条件を満たす積が一意的に定義され, 次を満たしている.

$$\begin{aligned}&(x+y)z = xz + yz, x(y+z) = xy + xz,\\ &(ax)y = x(ay) = a(xy), (xy)z = x(yz)\\ &\text{for } x, y, z \in \mathcal{E},\ a \in A.\end{aligned}$$

この積構造を備えた $\mathcal{E}$ を $\mathcal{E}_A(a_s, b_s)$ と表し, generic algebra と呼ぶ.

まず, 次のことの証明からはじめる.

Prop. 6.4.3 (22), (23) と結合法則を満たす $\mathcal{E}$ 上の積は存在するとしたら一意である.

Proof:
(22), (23) と結合法則を満たす $\mathcal{E}$ 上の積が存在したと仮定する.
$x, w \in W$ とする.
x or w が e のときには (22) より T_xT_w は決定されているので, $x, w \in W - \{e\}$ のときを考える.
$s_1s_2\dots s_r$, $s'_1s'_2\dots s'_k$ をそれぞれ x, w の reduced expression とすると, 積が (23) と結合法則を満たすことより

$$T_x = T_{s_1}T_{s_2}\dots T_{s_r},\ T_w = T_{s'_1}T_{s'_2}\dots T_{s'_k}$$

とかける.
従って,

$$T_xT_w = T_{s_1}T_{s_2}\dots T_{s_r}T_{s'_1}T_{s'_2}\dots T_{s'_k}$$

であり, (23) より右辺は決定されてしまう.
故に, 存在するとしたら一意的である. □

次に存在を示す. 方針としては $\mathcal{E}$ と A-加群として同型で, 積が (22), (23) を満たすものを構成する.

Def. 6.4.4

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_A(\mathcal{E}) := \ &\{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}; f(x+y) = f(x) + f(y), f(ax) = af(x)\\ &\text{for } x, y \in \mathcal{E}, a \in A\}\end{aligned}$$

とおき, $s \in S$ に対して $\lambda_s, \rho_s \in \mathrm{End}_A(\mathcal{E})$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}
\lambda_s(T_w) &:= \begin{cases} T_{sw} & \text{if } \ell(w) < \ell(sw), \\ a_s T_w + b_s T_{sw} & \text{if } \ell(w) > \ell(sw), \end{cases} \\
\rho_s(T_w) &:= \begin{cases} T_{ws} & \text{if } \ell(w) < \ell(ws), \\ a_s T_w + b_s T_{ws} & \text{if } \ell(w) > \ell(ws) \end{cases} \\
& \quad \text{for } w \in W, s \in S, \\
\lambda_s(\textstyle\sum_{w \in W} a_w T_w) &:= \sum_{w \in W} a_w \lambda_s(T_w), \\
\rho_s(\textstyle\sum_{w \in W} a_w T_w) &:= \sum_{w \in W} a_w \rho_s(T_w).
\end{aligned}$$

また, $\lambda_e = \rho_e = Id_{\mathcal{E}}$ とおく.

Rem. 6.4.5 $\mathrm{End}_A(\mathcal{E})$ は和, 積, A の作用を

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) := f(g(x)), \quad (af)(x) := af(x)$$
$$\text{for } f, g \in \mathrm{End}_A(\mathcal{E}), a \in A, x \in \mathcal{E}$$

と定義することにより A-代数となる.
特に, 積は写像の合成より結合法則を満たすので, 結合的 A-代数である.

このとき次が成立している.

Prop. 6.4.6 $s, s' \in S$ に対して, λ_s と $\rho_{s'}$ は可換である.
i.e.

$$\lambda_s(\rho_{s'}(T_w)) = \rho_{s'}(\lambda_s(T_w)) \text{ for } \forall w \in W.$$

Prop. 6.4.6 の証明の前に Lemma を１つ示す.

Lem. 6.4.7 $w \in W$, $s, s' \in S$ に対して

$$\ell(sw) = \ell(ws'), \ell(w) = \ell(sws') \Rightarrow sw = ws'.$$

Proof:
$\ell(sw) = \ell(w) \pm 1$ であるので２つの場合に分けて考える.
Case 1: $\ell(w) = \ell(sws') < \ell(sw) = \ell(ws')$ のとき.
$s_1 s_2 \ldots s_r$ を w の reduced expression とすると

$$ws' = s_1 s_2 \ldots s_r s' \text{: reduced expression.}$$

ここで $\ell(sws') < \ell(ws')$ であるので exchange condidion より

$$s_1 s_2 \dots s_r s' = s s_1 s_2 \dots s_r \text{ or } s s_1 \dots \widehat{s_i} \dots s_r s' \text{ for some } i \in [r]$$

$s_1 s_2 \dots s_r s' = s s_1 \dots \widehat{s_i} \dots s_r s'$ ならば

$$w = s_1 s_2 \dots s_r = s s_1 \dots \widehat{s_i} \dots s_r$$

となり $\ell(w) < \ell(sw)$ に反する.
従って

$$ws' = s_1 s_2 \dots s_r s' = s s_1 s_2 \dots s_r = sw.$$

Case 2: $\ell(sw) = \ell(ws') < \ell(w) = \ell(sws')$ のとき.
$\ell(ws') < \ell(w)$ より

$$\exists s_1, s_2, \dots s_r \in S \text{ s.t. } s_r = s', s_1 s_2 \dots s_{r-1} s_r\text{: reduced expression of } w$$

$\ell(sw) < \ell(w)$ であるので, exchange condition より

$$s_1 s_2 \dots s_{r-1} s' = s s_1 s_2 \dots s_{r-1} \text{or } s s_1 \dots \widehat{s_i} \dots s_{r-1} s' \text{ for some } i \in [r-1].$$

$s_1 s_2 \dots s_{r-1} s' = s s_1 \dots \widehat{s_i} \dots s_{r-1} s'$ のときには

$$sws' = s_1 \dots \widehat{s_i} \dots s_{r-1}$$

となり $\ell(sws') = \ell(w)$ に反するので

$$w = s_1 s_2 \dots s_{r-1} s' = s s_1 s_2 \dots s_{r-1}.$$

よって

$$sw = s_1 s_2 \dots s_{r-1} = ws'. \quad \square$$

Proof of Prop. 6.4.6:
$w \in W$ に対して

$$\lambda_s(\rho_{s'}(T_w)) = \rho_{s'}(\lambda_s(T_w))$$

となることを次の４つの場合に分けて示す.

(a) $\ell(w) < \ell(sw) = \ell(ws')$,
(b) $\ell(ws') < \ell(w) < \ell(sw)$,
(c) $\ell(sw) < \ell(w) < \ell(ws')$,
(d) $\ell(sw) = \ell(ws') < \ell(w)$.

Case (a): $\ell(w) < \ell(sw) = \ell(ws')$ のとき.
まず, このときには

$$\ell(sws') = \ell(w) \text{ or } \ell(w) + 2$$

であるので, さらに 2 つに分けて考える.
Subcase (a)-(i): $\ell(sws') = \ell(w) < \ell(sw) = \ell(ws')$ のとき.
Lem. 6.4.7 より $sw = ws'$ であり, 特にこのとき s と s' は共役であるので, $a_s = a_{s'}$, $b_s = b_{s'}$.
従って

$$\begin{aligned}\lambda_s(\rho_{s'}(T_w)) &= \lambda_s(T_{ws'}) \\ &= a_s T_{ws'} + b_s T_{sws'} \\ &= a_{s'} T_{sw} + b_{s'} T_{sws'} \\ &= \rho_{s'}(T_{sw}) \\ &= \rho_{s'}(\lambda_s(T_w)).\end{aligned}$$

Subcase (a)-(ii) $\ell(w) < \ell(sw) = \ell(ws') < \ell(sws')$ のとき.

$$\begin{aligned}\lambda_s(\rho_{s'}(T_w)) &= \lambda_s(T_{ws'}) \\ &= T_{sws'} \\ &= \rho_{s'}(T_{sw}) \\ &= \rho_{s'}(\lambda_s(T_w)).\end{aligned}$$

Case (b): $\ell(ws') < \ell(w) < \ell(sw)$ のとき.

$$\ell(sws') = \ell(ws') \pm 1 = \ell(sw) \pm 1, \ell(ws') = \ell(w) - 1, \ell(sw) = \ell(w) + 1$$

であるので

$$\ell(ws') < \ell(sws') = \ell(w) < \ell(sw).$$

従って

$$\begin{aligned}\lambda_s(\rho_{s'}(T_w)) &= \lambda_s(a_{s'} T_w + b_{s'} T_{ws'}) \\ &= a_{s'} T_{sw} + b_{s'} T_{sws'} \\ &= \rho_{s'}(T_{sw}) \\ &= \rho_{s'}(\lambda_s(T_w)).\end{aligned}$$

Case (c): $\ell(sw) < \ell(w) < \ell(ws')$ のとき.

$$\ell(sws') = \ell(ws') \pm 1 = \ell(sw) \pm 1, \ell(ws') = \ell(w) + 1, \ell(sw) = \ell(w) - 1$$

であるので

$$\ell(sw) < \ell(sws') = \ell(w) < \ell(ws').$$

従って

$$
\begin{aligned}
\lambda_s(\rho_{s'}(T_w)) &= \lambda_s(T_{ws'}) \\
&= a_s T_{ws'} + b_s T_{sws'} \\
&= \rho_{s'}(a_s T_w + b_s T_{sw}) \\
&= \rho_{s'}(\lambda_s(T_w)).
\end{aligned}
$$

Case (d): $\ell(sw) = \ell(ws') < \ell(w)$ のとき.
Case (a) と同様にさらに2つに分けて考える.
Subcase (d)-(i): $\ell(sw) = \ell(ws') < \ell(w) = \ell(sws')$ のとき.
Lem. 6.4.7 より $sw = ws'$ であり, 特にこのとき s と s' は共役であるので $a_s = a_{s'}$, $b_s = b_{s'}$.
従って

$$
\begin{aligned}
\lambda_s(\rho_{s'}(T_w)) &= \lambda_s(a_{s'} T_w + b_{s'} T_{ws'}) \\
&= a_{s'}(a_s T_w + b_s T_{sw}) + b_{s'} T_{sws'} \\
&= a_s(a_{s'} T_w + b_{s'} T_{ws'}) + b_s T_{sws'} \\
&= \rho_{s'}(a_s T_w + b_s T_{sw}) \\
&= \rho_{s'}(\lambda_s(T_w)).
\end{aligned}
$$

Subcase (d)-(ii): $\ell(sws') < \ell(sw) = \ell(ws') < \ell(w)$ のとき.

$$
\begin{aligned}
\lambda_s(\rho_{s'}(T_w)) &= \lambda_s(a_{s'} T_w + b_{s'} T_{ws'}) \\
&= a_{s'}(a_s T_w + b_s T_{sw}) + b_{s'}(a_s T_{ws'} + b_s T_{sws'}) \\
&= a_{s'} a_s T_w + a_{s'} b_s T_{sw} + a_s b_{s'} T_{ws'} + b_s b_{s'} T_{sws'} \\
&= a_s(a_{s'} T_w + b_{s'} T_{ws'}) + b_s(a_{s'} T_{sw} + b_{s'} T_{sws'}) \\
&= \rho_{s'}(a_s T_w + b_s T_{sw}) \\
&= \rho_{s'}(\lambda_s(T_w)).
\end{aligned}
$$

従って,

$$
\lambda_s(\rho_{s'})(T_w) = \rho_{s'}(\lambda_s)(T_w) \quad \text{for } \forall w \in W. \quad \square
$$

Prop. 6.4.8 $\mathcal{L}$ を $\{\lambda_s; s \in S\} \cup \{\lambda_e\}$ で生成される $\mathrm{End}_A(\mathcal{E})$ の部分 A-代数とする.
従って, 集合として $\mathcal{L}$ は次のもの.

$$
\mathcal{L} = \{ \sum_{(s_1, s_2, \dots, s_r) \in \widetilde{S}} a_{s_1, s_2, \dots, s_r} \lambda_{s_1} \lambda_{s_2} \dots \lambda_{s_r} + a\lambda_e \ (\text{有限和}); a_{s_1, s_2, \dots, s_r}, a \in A \}
$$

ただし, $\widetilde{S} := \cup_{r\geq 1}\{(s_1, s_2, \ldots, s_r) \in S^r\}$ とおく.
$\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{E}$ を

$$\begin{aligned}
&\varphi(\sum_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)\in\widetilde{S}} a_{s_1,s_2,\ldots,s_r}\lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\ldots\lambda_{s_r} + a\lambda_e) \\
:= &\sum_{(s_1,s_2,\ldots,s_r)\in\widetilde{S}} a_{s_1,s_2,\ldots,s_r}\lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\ldots\lambda_{s_r}(T_e) + a\lambda_e(T_e)
\end{aligned}$$

で定義する.
このとき次が成立している.

(i) φ は A-加群としての同型写像[27]
(ii) $w \in W$ に対して $\lambda_w \in \mathcal{L}$ を

$$\lambda_w := \lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\ldots\lambda_{s_r} \text{ if } s_1s_2\ldots s_r\text{: reduced expression of } w$$

で定義できる.
従って, 特に $\mathcal{L}$ は $\{\lambda_w; w \in W\}$ を基底としてもつ free A-加群で,

$$\varphi(\sum_{w\in W} a_w\lambda_w) = \sum_{w\in W} a_wT_w$$

となっている.
(iii) $\mathcal{L}$ の積は結合法則及び (22), (23) を満たす.
i.e. $x, y, w \in W$, $s \in S$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\lambda_x(\lambda_y\lambda_w) = (\lambda_x\lambda_y)\lambda_w, \\
&\lambda_w\lambda_e = \lambda_e\lambda_w = \lambda_w, \\
&\lambda_s\lambda_w = \begin{cases} \lambda_{sw} & \text{if } \ell(w) < \ell(sw) \\ a_s\lambda_w + b_s\lambda_{sw} & \text{if } \ell(w) > \ell(sw) \end{cases}
\end{aligned}$$

を満たしている.

Proof:
(i) φ の定義より, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{L}$, $a \in A$ に対して

$$\varphi(\lambda_1 + \lambda_2) = \varphi(\lambda_1) + \varphi(\lambda_2),\ \varphi(a\lambda) = a\varphi(\lambda)$$

は成立しているので, 全射と単射を示す.
まず, 全射を示す.

[27] i.e. 全単射で $\varphi(\lambda_1 + \lambda_2) = \varphi(\lambda_1) + \varphi(\lambda_2)$, $\varphi(a\lambda) = a\varphi(\lambda)$ を満たす.

$w \in W - \{e\}$ に対して $s_1 s_2 \dots s_r$ を w の reduced expression とすると λ_s $(s \in S)$ の定義より

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\dots\lambda_{s_r}) &= \lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\dots\lambda_{s_r}(T_e)\\ &= T_{s_1 s_2 \dots s_r}\\ &= T_w.\end{aligned}$$

さらに $\varphi(\lambda_e) = T_e$ であるので $w \in W$ に対して

$$\exists \mu_w \in \mathcal{L} \text{ s.t. } \varphi(\mu_w) = T_w.$$

従って $\sum_{w\in W} a_w T_W \in \mathcal{E}$ に対して

$$\varphi(\sum_{w\in W} a_w \mu_w) = \sum_{w\in W} a_w T_w.$$

よって φ は全射である.
次に単射を示す.
線形性より

$$\varphi\text{: 単射} \Leftrightarrow \text{“}\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0\text{”}$$

よって右辺を示す.
まず

$$\varphi(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda(T_w) = 0 \text{ for } \forall w \in W \tag{24}$$

となることを $\ell(w)$ の帰納法により示す.
$\varphi(\lambda) = 0$ であるので, φ の定義より

$$\lambda(T_e) = 0.$$

従って, $\ell(w) = 0$ のときは o.k. であるので, $\ell(w) = k-1$ まで成立したと仮定し $\ell(w) = k$ のときを示す $(k \geq 1)$.
まず, Prop. 6.4.6 より

$$\lambda_s \rho_{s'} = \rho_{s'} \lambda_s \text{ for } s, s' \in S$$

であるので

$$\rho_s \lambda = \lambda \rho_s \text{ for } s \in S, \lambda \in \mathcal{L}.$$

であることに注意する.
$k \geq 1$ より

$$\exists s \in S \text{ s.t. } \ell(ws) < \ell(w).$$

従って, 先の注意と帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}\lambda(T_w) &= \lambda(T_{(ws)s}) \\ &= \lambda(\rho_s(T_{ws})) \\ &= \rho_s(\lambda(T_{ws})) \\ &= \rho_s(0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

従って, (24) が示された.
よって $\varphi(\lambda) = 0$ のときには $\forall \sum_{w \in W} a_w T_w \in \mathcal{E}$ に対して

$$\lambda(\sum_{w \in W} a_w T_w) = \sum_{w \in W} a_w \lambda(T_w) = 0$$

となるので

$$\lambda = 0.$$

故に φ の単射が示された.
(ii) $w \in W$ に対して $s_1 s_2 \dots s_r$, $s'_1 s'_2 \dots s'_r$ を w の reduced expression とすると

$$\varphi(\lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\dots\lambda_{s_r}) = T_{s_1 s_2 \dots s_r} = T_w,$$
$$\varphi(\lambda_{s'_1}\lambda_{s'_2}\dots\lambda_{s'_r}) = T_{s'_1 s'_2 \dots s'_r} = T_w$$

となり, (i) より φ は単射であるので

$$\lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\dots\lambda_{s_r} = \lambda_{s'_1}\lambda_{s'_2}\dots\lambda_{s'_r}$$

従って,

$$\lambda_w := \lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\dots\lambda_{s_r} \text{ if } s_1 s_2 \dots s_r\text{: reduced expression of } w$$

と定義できる.
(iii) $\mathcal{L}$ の積は写像の合成であるので, 結合法則は成立している.
また, $\lambda_e = Id_{\mathcal{E}}$ より, 積は (22) を満たしている.
(23) を満たすことを示す.
まず, $s \in S$, $w \in W$ に対して $\ell(w) < \ell(sw)$ のとき

$$\lambda_s \lambda_w = \lambda_{sw}$$

となることを示す.
$s_1 s_2 \dots s_r$ を w の reduced expression とすると, $ss_1 s_2 \dots s_r$ は sw の reduced expression であるので, λ_w, λ_{sw} の定義より

$$\lambda_s \lambda_w = \lambda_s \lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\dots\lambda_{s_r} = \lambda_{sw}.$$

次に $s \in S$ に対して, まず

$$\lambda_s^2 = a_s\lambda_s + b_s\lambda_e$$

となることを示す.
$w \in W$ とする.
Case 1. $\ell(w) < \ell(sw)$ のとき.
$\lambda_s(T_w) = T_{sw}$ であるので

$$\begin{aligned}\lambda_s^2(T_w) &= \lambda_s(T_{sw})\\ &= a_sT_{sw} + b_sT_w\\ &= (a_s\lambda_s + b_s\lambda_e)(T_w).\end{aligned}$$

Case 2. $\ell(w) > \ell(sw)$ のとき.
$\lambda_s(T_w) = a_sT_w + b_sT_{sw}$ であるので

$$\begin{aligned}\lambda_s^2(T_w) &= \lambda_s(a_sT_w + b_sT_{sw})\\ &= \lambda_s(a_sT_w) + b_sT_w\\ &= (a_s\lambda_s + b_s\lambda_e)(T_w).\end{aligned}$$

従って, $\forall w \in W$ に対して

$$\lambda_s^2(T_w) = (a_s\lambda_s + b_s\lambda_e)(T_w)$$

となるので

$$\lambda_s^2 = a_s\lambda_s + b_s\lambda_e.$$

故に, $s \in S$, $w \in W$ に対して $\ell(sw) < \ell(w)(= \ell(s(sw))$ のとき

$$\begin{aligned}\lambda_s\lambda_w &= \lambda_s\lambda_{s(sw)}\\ &= \lambda_s(\lambda_s\lambda_{sw})\\ &= \lambda_s^2\lambda_{sw}\\ &= (a_s\lambda_s + b_s\lambda_e)\lambda_{sw}\\ &= a_s\lambda_w + b_s\lambda_{sw}.\end{aligned}$$

以上により $\{\lambda_w; w \in W\}$ が (23) を満たすのが示された. □

Cor. 6.4.9 $x, y \in W$ に対して

$$\lambda_x\lambda_y = \sum_{w\in W} a_w\lambda_w$$

のとき

$$T_xT_y := \sum_{w\in W} a_wT_w$$

とおき, $\sum_{x\in W} a_xT_x \in \mathcal{E}$ と $\sum_{y\in W} b_yT_y \in \mathcal{E}$ の積を

$$(\sum_{x\in W} a_xT_x)(\sum_{y\in W} b_yT_y) := \sum_{x,y\in W} a_xb_yT_xT_y$$

で定義すると, この積は結合法則と (22), (23) を満たしている.
従って, 特に generic algebra が存在する.

Proof:
Prop. 6.4.8 と積の定義より $x, y, w \in W$, $s \in S$ に対して,

$$\begin{aligned}
&T_x(T_yT_w) = (T_xT_y)T_w,\\
&T_wT_e = T_eT_w = T_w,\\
&T_sT_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{if } \ell(w) < \ell(sw),\\ a_sT_w + b_sT_{sw} & \text{if } \ell(w) > \ell(sw)\end{cases}
\end{aligned}$$

となるので, 結合法則と (22), (23) が満たされている.
よって generic algebra の存在も証明された. □

最後に次のことを示しておく.

Prop. 6.4.10 (23) は次の (25), (26) と置き換えてもよい.

$$T_wT_s = \begin{cases} T_{ws} & \text{if } \ell(w) < \ell(ws)\\ a_sT_w + b_sT_{ws} & \text{if } \ell(w) > \ell(ws)\end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &T_sT_w = T_{sw} \text{ if } \ell(w) < \ell(sw)\\ &T_s^2 = a_sT_s + b_sT_e\end{aligned} \tag{26}$$

Prop. 6.4.10 は次の Lemma の系として成立する.

Lem. 6.4.11 $\mathcal{E}$ には結合法則と (22) を満たす積が定義されているとする.

(i) 次の (a), (b) は同値
 (a) $T_sT_w = T_{sw}$ if $\ell(w) < \ell(sw)$ for $s \in S$, $w \in W$.
 (b) $T_wT_s = T_{ws}$ if $\ell(w) < \ell(ws)$ for $s \in S$, $w \in W$.
(ii) 上の (i) のどちらかが満たされているとき[28] 次の (a), (b), (c) は同値

[28] i.e. どちらも満たされているとき.

(a) $T_sT_w = a_sT_w + b_sT_{sw}$ if $\ell(w) > \ell(sw)$ for $s \in S$, $w \in W$.
(b) $T_wT_s = a_sT_w + b_sT_{ws}$ if $\ell(w) > \ell(ws)$ for $s \in S$, $w \in W$.
(c) $T_sT_s = a_sT_s + b_sT_e$ for $s \in S$.

Proof:
(i) (a)⇒(b)
$\ell(w)$ に関する帰納法により示す.
$\ell(w) = 0$ (i.e. $w = e$) のときは (22) より

$$T_eT_s = T_s$$

となり成立している.
$\ell(w) = k-1$ まで成立していると仮定し $\ell(w) = k$ のときを示す $(k \geq 1)$.
$s_1s_2\ldots s_k$ を w の reduced expression とすると
$\ell(w) < \ell(ws)$ より

$$ws = s_1s_2\ldots s_ks\text{: reduced expression.}$$

従って, 帰納法の仮定と (a) より

$$\begin{aligned} T_wT_s &= T_{s_1s_2\ldots s_k}T_s \\ &= (T_{s_1}T_{s_2s_3\ldots s_k})T_s \quad (\because \text{(a)}) \\ &= T_{s_1}(T_{s_2s_3\ldots s_k}T_s) \\ &= T_{s_1}T_{s_2s_3\ldots s_ks} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= T_{s_1s_2\ldots s_ks} \quad (\because \text{(a)}) \\ &= T_{ws}. \end{aligned}$$

(b)⇒(a) も同様に示せる.
(ii) (c) は (a), (b) の $w = s$ の場合であるので (a)⇒(c), (b)⇒(c) は成立している.
(c)⇒(a) を示す.
$\ell(sw) < \ell(w) = \ell(s(sw))$ より

$$\begin{aligned} T_sT_w &= T_sT_{s(sw)} \\ &= T_s(T_sT_{sw}) \quad (\because \text{(i)}) \\ &= (T_sT_s)T_{sw} \\ &= (a_sT_s + b_sT_e)T_{sw} \quad (\because \text{(c)}) \\ &= a_sT_w + b_sT_{sw} \quad (\because \text{(i), (22)}). \end{aligned}$$

(c)⇒(b) も同様に示せる. □

6.5 inductive formula of K-L polynomials

この節での目的は次を示すことである.

Th. 6.5.1 (i) $x, w \in W$, $s \in S$, $sw < w$ とする.

$$\begin{aligned} P_{x,w}(q) &= \begin{cases} qP_{x,sw}(q) + P_{sx,sw}(q) & \text{if } sx < x \\ P_{x,sw}(q) + qP_{sx,sw}(q) & \text{if } x < sx \end{cases} \\ &- \sum_{sy<y<sw} q^{\frac{\ell(w)-\ell(y)}{2}} \mu(y, sw) P_{x,y}(q) \end{aligned}$$

ここで, $\mu(y, sw) = [q^{\frac{\ell(sw)-\ell(y)-1}{2}}](P_{y,sw}(q))$.

(ii) $x, w \in W$, $s \in S$, $sw < w$ に対して

$$P_{x,w}(q) = P_{sx,w}(q).$$

$sw < w$ のとき $x \leq w \Leftrightarrow sx \leq w$ となっていることに注意 (cf. Lem. 3.3.4).

まず, 次を示すことからはじめる.

Prop. 6.5.2 $w \in W$, $s \in S$ とする.

$$q^{-\frac{1}{2}} T_s C'_w = \begin{cases} -q^{-\frac{1}{2}} C'_w + C'_{sw} + \sum_{sy<y<w} \mu(y, w) C'_y & \text{if } w < sw, \\ q^{\frac{1}{2}} C'_w & \text{if } sw < w. \end{cases}$$

Prop. 6.5.2 の証明の前に準備として補題を 3 つ示す.

Lem. 6.5.3 $w \in W$, $s \in S$ に対して次が成立する.

(i) $\overline{q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e)} = q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e)$.

(ii) $\overline{q^{-\frac{1}{2}} T_s - q^{\frac{1}{2}} T_e} = q^{-\frac{1}{2}} T_s - q^{\frac{1}{2}} T_e$.

Proof:

(i)

$$\begin{aligned} \overline{q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e)} &= q^{\frac{1}{2}}(T_s^{-1} + T_e) \\ &= q^{\frac{1}{2}}(q^{-1} T_s + (q^{-1} - 1) T_e + T_e) \\ &= q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\overline{q^{-\frac{1}{2}}T_s - q^{\frac{1}{2}}T_e} &= q^{\frac{1}{2}}T_s^{-1} - q^{-\frac{1}{2}}T_e \\ &= q^{\frac{1}{2}}(q^{-1}T_s + (q^{-1}-1)T_e) - q^{-\frac{1}{2}}T_e \\ &= q^{-\frac{1}{2}}T_s - q^{\frac{1}{2}}T_e. \quad \square\end{aligned}$$

次の補題の前に記号を準備する.

Notation 6.5.4 $x, w \in W$ に対して

$$\begin{aligned}&T_x^* := q^{-\frac{\ell(x)}{2}}T_x, \\ &P_{x,w}^*(q) := q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}P_{x,w}(q)\end{aligned}$$

とおく.

Rem. 6.5.5 次が成立していることに注意.

(i) $P_{x,w}^*(q) \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$ if $x < w$.

(ii) $P_{x,x}^*(q) = 1$ for $x \in W$.

Lem. 6.5.6 $x, w \in W$, $s \in S$, $sx < x < w < sw$ に対して

$$\sum_{sy<y<w} \mu(y,w)P_{x,y}^*(q) - q^{\frac{1}{2}}P_{x,w}^*(q) \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}].$$

Proof:

$$q^{\frac{1}{2}}P_{x,w}^*(q) = q^{-\frac{\ell(w)-\ell(x)-1}{2}}P_{x,w}(q)$$

であるので, $\deg P_{x,w}(q) \leq \frac{\ell(w)-\ell(x)-1}{2}$ より

$$\exists P \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \text{ s.t. } q^{\frac{1}{2}}P_{x,w}^*(q) = \mu(x,w) + P.$$

従って Rem. 6.5.5 より

$$\begin{aligned}&\sum_{sy<y<w} \mu(y,w)P_{x,y}^*(q) - q^{\frac{1}{2}}P_{x,w}^*(q) \\ &= \sum_{sy<y<w, x<y} \mu(y,w)P_{x,y}^*(q) + \mu(x,w)P_{x,x}^* - \mu(x,w) - P \\ &= \sum_{sy<y<w, x<y} \mu(y,w)P_{x,y}^*(q) - P \\ &\in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]. \quad \square\end{aligned}$$

Lem. 6.5.7 $w \in W,\ s \in S$ に対して次が成立する.
(i) $w < sw$ のとき

$$q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e)C'_w - C'_{sw} - \sum_{sy<y<w} \mu(y,w)C'_y = \sum_{x\in W} f_x T^*_x$$

とおくと

$$f_x = \begin{cases} q^{\frac{1}{2}} P^*_{x,w}(q) + P^*_{sx,w}(q) & \text{if } sx < x \\ q^{-\frac{1}{2}} P^*_{x,w}(q) + P^*_{sx,w}(q) & \text{if } x < sx \end{cases}$$
$$-P^*_{x,sw}(q) - \sum_{sy<y<w} \mu(y,w) P^*_{x,y}(q).$$

(ii) $sw < w$ のとき

$$(q^{-\frac{1}{2}}T_s - q^{\frac{1}{2}}T_e)C'_w = \sum_{x\in W} g_x T^*_x$$

とおくと

$$g_x = \begin{cases} P^*_{sx,w}(q) - q^{-\frac{1}{2}} P^*_{x,w}(q) & \text{if } sx < x, \\ P^*_{sx,w}(q) - q^{\frac{1}{2}} P^*_{x,w}(q) & \text{if } x < sx. \end{cases}$$

Proof:
ただひたすらまじめに計算する.
(i)

$$\begin{aligned}
&q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e)C'_w \\
&= q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e) \sum_{x\in W} q^{-\frac{\ell(w)}{2}} P_{x,w}(q)\ T_x \\
&= \sum_{x\in W} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{x,w}(q) T_s T_x + \sum_{x\in W} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{x,w}(q)\ T_x \\
&= \sum_{sx<x} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{x,w}(q)(qT_{sx} + (q-1)T_x) + \sum_{x<sx} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{x,w}(q)\ T_{sx} \\
&\quad + \sum_{x\in W} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{x,w}(q)\ T_x \\
&= \sum_{y<sy} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{sy,w}(q)\ qT_y + \sum_{sy<y} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{y,w}(q)(q-1)T_y \\
&\quad + \sum_{sy<y} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{sy,w}(q)\ T_y + \sum_{y\in W} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{y,w}(q)\ T_y \\
&= \sum_{y<sy} (q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}} P_{sy,w}(q) + q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{y,w}(q)) T_y \\
&\quad + \sum_{sy<y} (q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{y,w}(q)(q-1) + q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{sy,w}(q) + q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{y,w}(q))\ T_y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{y<sy} q^{\frac{\ell(y)}{2}} (q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}} P_{sy,w}(q) + q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{y,w}(q)) T_y^* \\
&\quad + \sum_{sy<y} q^{\frac{\ell(y)}{2}} (q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}} P_{y,w}(q) + q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}} P_{sy,w}(q))\ T_y^* \\
&= \sum_{y<sy} (q^{\frac{\ell(y)-\ell(w)+1}{2}} P_{sy,w}(q) + q^{\frac{\ell(y)-\ell(w)-1}{2}} P_{y,w}(q)) T_y^* \\
&\quad + \sum_{sy<y} (q^{\frac{\ell(y)-\ell(w)+1}{2}} P_{y,w}(q) + q^{\frac{\ell(y)-\ell(w)-1}{2}} P_{sy,w}(q))\ T_y^* \\
&= \sum_{y<sy} (P^*_{sy,w}(q) + q^{-\frac{1}{2}} P^*_{y,w}(q)) T_y^* + \sum_{sy<y} (q^{\frac{1}{2}} P^*_{y,w}(q) + P^*_{sy,w}(q))\ T_y^* \qquad (27)
\end{aligned}
$$

他方 C'_w の定義より

$$
\begin{aligned}
C'_{sw} &= q^{-\frac{\ell(sw)}{2}} \sum_{x\in W} P_{x,sw}(q) T_x \\
&= q^{-\frac{\ell(sw)}{2}} \sum_{x\in W} P_{x,sw}(q) q^{\frac{\ell(x)}{2}} T_x^* \\
&= \sum_{y\in W} P^*_{y,sw}(q) T_y^*. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

また次も成立している.

$$
\begin{aligned}
\sum_{sy<y<w} \mu(y,w) C'_y &= \sum_{sy<y<w} \mu(y,w) \sum_{x\in W} P^*_{x,y}(q) T_x^* \\
&= \sum_{x\in W} \sum_{sy<y<w} \mu(y,w) P^*_{x,y}(q) T_x^* \qquad (29)
\end{aligned}
$$

従って, (27), (28), (29) より

$$
\begin{aligned}
f_x = & \begin{cases} q^{\frac{1}{2}} P^*_{x,w}(q) + P^*_{sx,w}(q) & \text{if } sx < x \\ q^{-\frac{1}{2}} P^*_{x,w}(q) + P^*_{sx,w}(q) & \text{if } x < sx \end{cases} \\
& -P^*_{x,sw}(q) - \sum_{sy<y<w} \mu(y,w) P^*_{x,y}(q).
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
&(q^{-\frac{1}{2}}T_s - q^{\frac{1}{2}}T_e)C'_w \\
&= (q^{-\frac{1}{2}}T_s - q^{\frac{1}{2}}T_e)\sum_{x\in W} q^{-\frac{\ell(w)}{2}}P_{x,w}(q)T_x \\
&= \sum_{x\in W} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}}P_{x,w}(q)T_sT_x - \sum_{x\in W} q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}}P_{x,w}(q)T_x \\
&= \sum_{x<sx} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}}P_{x,w}(q)T_{sx} + \sum_{sx<x} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}}P_{x,w}(q)(qT_{sx}+(q-1)T_x) \\
&\quad - \sum_{x\in W} q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}}P_{x,w}(q)T_x \\
&= \sum_{x<sx} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}}P_{x,w}(q)T_{sx} + \sum_{sx<x} q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}}P_{x,w}(q)T_{sx} \\
&\quad + \sum_{sx<x} (q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}}P_{x,w}(q) - q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}}P_{x,w}(q))T_x - \sum_{x\in W} q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}}P_{x,w}(q)T_x \\
&= \sum_{sy<y} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}}P_{sy,w}(q)T_y + \sum_{y<sy} q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}}P_{sy,w}(q)T_y \\
&\quad - \sum_{sy<y} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}}P_{y,w}(q)T_y - \sum_{y<sy} q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}}P_{y,w}(q)T_y \\
&= \sum_{sy<y} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}}(P_{sy,w}(q) - P_{y,w}(q))T_y + \sum_{y<sy} q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}}(P_{sy,w}(q) - P_{y,w}(q))T_y \\
&= \sum_{sy<y} q^{-\frac{\ell(w)+1}{2}}(q^{\frac{\ell(w)-\ell(sy)}{2}}P^*_{sy,w}(q) - q^{\frac{\ell(w)-\ell(y)}{2}}P^*_{y,w}(q))q^{\frac{\ell(y)}{2}}T^*_y \\
&\quad + \sum_{y<sy} q^{-\frac{\ell(w)-1}{2}}(q^{\frac{\ell(w)-\ell(sy)}{2}}P^*_{sy,w}(q) - q^{\frac{\ell(w)-\ell(y)}{2}}P^*_{y,w}(q))q^{\frac{\ell(y)}{2}}T^*_y \\
&= \sum_{sy<y} (P^*_{sy,w}(q) - q^{-\frac{1}{2}}P^*_{y,w}(q))T^*_y + \sum_{y<sy} (P^*_{sy,w}(q) - q^{\frac{1}{2}}P^*_{y,w}(q))T^*_y
\end{aligned}
$$

従って,

$$
g_x = \begin{cases} P^*_{sx,w}(q) - q^{-\frac{1}{2}}P^*_{x,w}(q) & \text{if } sx < x, \\ P^*_{sx,w}(q) - q^{\frac{1}{2}}P^*_{x,w}(q) & \text{if } x < sx \end{cases}
$$

が成立する. □

Proof of Prop. 6.5.2:

$\ell(w)$ に関する帰納法により示す.
$\ell(w) = 0$ のとき
$w = e$, $s \in W$ のときを考えるとよい.
Ex. 5.2.3-(i) より

$$
\begin{aligned}
q^{-\frac{1}{2}}T_sC'_e &= q^{-\frac{1}{2}}T_sT_e \\
&= q^{-\frac{1}{2}}T_s.
\end{aligned}
$$

他方, Ex. 5.2.3-(iii) より

$$\begin{aligned} -q^{-\frac{1}{2}}C'_e + C'_s + \textstyle\sum_{sy<y<e}\mu(y,e)C'_y &= -q^{-\frac{1}{2}}T_e + q^{-\frac{1}{2}}(T_e+T_s) \\ &= q^{-\frac{1}{2}}T_s. \end{aligned}$$

従って,

$$q^{-\frac{1}{2}}T_sC'_e = -q^{-\frac{1}{2}}C'_e + C'_s + \sum_{sy<y<e}\mu(y,e)C'_y.$$

$\ell(w)=k-1$ まで o.k. とし $\ell(w)=k$ のときを示す ($k \geq 1$).
Case 1. $w < sw$ のとき
まず

$$q^{-\frac{1}{2}}T_sC'_w + q^{-\frac{1}{2}}C'_w - C'_{sw} - \sum_{sy<y<w}\mu(y,w)C'_y = \sum_{x\in W} f_xT^*_x$$

とおき $sx < x$, $x < sx$ のどちらの場合についても

$$f_x \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$$

となることを示す.
ここで注意として

$$\begin{aligned} &\sum_{x\in W} f_xT^*_x \\ &= q^{-\frac{1}{2}}T_sC'_w + q^{-\frac{1}{2}}C'_w - C'_{sw} - \sum_{sy<y<w}\mu(y,w)C'_y \\ &= q^{-\frac{1}{2}}(T_s+T_e)q^{-\frac{\ell(w)}{2}}\sum_{z\leq w}P_{z,w}(q)\ T_z - q^{-\frac{\ell(sw)}{2}}\sum_{z\leq sw}P_{z,sw}(q)\ T_z \\ &\quad - \sum_{sy<y<w}\mu(y,w)q^{-\frac{\ell(y)}{2}}\sum_{z\leq y}P_{z,y}(q)\ T_z \end{aligned}$$

であるので

$$f_x = 0 \text{ if } \ell(x) > \ell(w)+1. \tag{30}$$

(a) $sx < x$ のとき
Lem. 6.5.7-(i) より

$$\begin{aligned} f_x = \quad & q^{\frac{1}{2}}P^*_{x,w}(q) + P^*_{sx,w}(q) \\ & -P^*_{x,sw}(q) - \sum_{sy<y<w}\mu(y,w)P^*_{x,y}(q). \end{aligned}$$

Lem. 6.5.6 より

$$\exists P_1 \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \text{ s.t. } \sum_{sy<y<w}\mu(y,w)P^*_{x,y}(q) = q^{\frac{1}{2}}P^*_{x,w}(q) + P_1.$$

従って

$$f_x = P^*_{sx,w}(q) - P^*_{x,sw}(q) - P_1 \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}].$$

($sx = w \Leftrightarrow x = sw$ に注意).
(b) $x < sx$ のとき

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{sy<y<w} \mu(y,w)P^*_{x,y}(q) &= \sum_{sy<y<w, x\leq y} \mu(y,w)P^*_{x,y}(q) \\
&= \sum_{sy<y<w, x<y} \mu(y,w)P^*_{x,y}(q) \quad (\because x < sx,\ sy < y) \\
&\in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]
\end{aligned}$$

であるので Lem. 6.5.7-(i) より

$$\begin{aligned}
f_x = \ & q^{-\frac{1}{2}}P^*_{x,w}(q) + P^*_{sx,w}(q) \\
& -P^*_{x,sw}(q) - \sum_{sy<y<w} \mu(y,w)P^*_{x,y}(q) \\
& \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}].
\end{aligned}$$

次に, 実際は $\forall x \in W$ に対して $f_x = 0$ となることを示す.
Lem. 6.5.3-(i) より

$$\begin{aligned}
&\overline{q^{-\frac{1}{2}}T_sC'_w + q^{-\frac{1}{2}}C'_w - C'_{sw} - \sum_{sy<y<w} \mu(y,w)C'_y} \\
&= \overline{q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e)C'_w} - \overline{C'_{sw}} - \sum_{sy<y<w} \overline{\mu(y,w)}\,\overline{C'_y} \\
&= q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e)C'_w - C'_{sw} - \sum_{sy<y<w} \mu(y,w)C'_y.
\end{aligned}$$

従って

$$\overline{\sum_{x\in W} f_xT^*_x} = \sum_{x\in W} f_xT^*_x.$$

故に

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{x\in W} f_x T_x^* &= \overline{\sum_{x\in W} f_x T_x^*} \\
&= \sum_{x\in W} \overline{f_x T_x^*} \\
&= \sum_{x\in W} \overline{f_x} \overline{q^{-\frac{\ell(x)}{2}} T_x} \\
&= \sum_{x\in W} \overline{f_x} q^{\frac{\ell(x)}{2}} \overline{T_x} \\
&= \sum_{x\in W} \overline{f_x} q^{\frac{\ell(x)}{2}} q^{-\ell(x)} \sum_{y\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} R_{y,x}(q) T_y \\
&= \sum_{x\in W} \overline{f_x} q^{-\frac{\ell(x)}{2}} \sum_{y\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} R_{y,x}(q) T_y \\
&= \sum_{x,y\in W, y\le x} \overline{f_x} q^{-\frac{\ell(x)}{2}} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} R_{y,x}(q) T_y \\
&= \sum_{x,y\in W, y\le x} \overline{f_x} q^{-\frac{\ell(x)}{2}} q^{\frac{\ell(y)}{2}} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} R_{y,x}(q) T_y^* \\
&= \sum_{y\in W} q^{\frac{\ell(y)}{2}} (-1)^{\ell(y)} (\sum_{y\le x} \overline{f_x} q^{-\frac{\ell(x)}{2}} (-1)^{\ell(x)} R_{y,x}(q)) T_y^*.
\end{aligned}$$

$\exists x \in W$ s.t. $f_x \neq 0$ と仮定し x_0 を $f_{x_0} \neq 0$ となる W の元の中で長さが最大のものの一つとする[29] .
このとき

$$\begin{aligned}
\text{右辺の } T_{x_0}^* \text{ の係数} &= q^{\frac{\ell(x_0)}{2}} (-1)^{\ell(x_0)} (\sum_{x_0\le x} \overline{f_x} q^{-\frac{\ell(x)}{2}} (-1)^{\ell(x)} R_{x_0,x}(q)) \\
&= q^{\frac{\ell(x_0)}{2}} (-1)^{\ell(x_0)} \overline{f_{x_0}} q^{-\frac{\ell(x_0)}{2}} (-1)^{\ell(x_0)} R_{x_0,x_0}(q) \\
&= \overline{f_{x_0}}.
\end{aligned}$$

即ち

$$f_{x_0} = \overline{f_{x_0}} \neq 0.$$

これは $f_{x_0} \in \mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$, $\overline{f_{x_0}} \in \mathbb{Z}^+[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$ より

$$\mathbb{Z}^-[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] \cap \mathbb{Z}^+[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}] = \{0\}$$

に反する.
従って,

$$f_x = 0 \text{ for } \forall x \in W.$$

[29] 実際 (30) より $f_x = 0$ if $\ell(x) > \ell(w) + 1$ が成立しているので $\sharp W < \infty$ である必要はない.

よって

$$q^{-\frac{1}{2}}T_sC'_w + q^{-\frac{1}{2}}C'_w - C'_{sw} - \sum_{sy<y<w} \mu(y,w)C'_y = 0$$

となり o.k.

Case 2. $sw < w$ のとき

$w' = sw$ とおくと $\ell(w') < \ell(w)$, $w' < sw' \in W$ であるので帰納法の仮定より

$$q^{-\frac{1}{2}}(T_s + T_e)C'_{sw} = C'_w + \sum_{sy<y<sw} \mu(y,sw)C'_y$$

は使って良い.

従って

$$\begin{aligned}
&q^{-\frac{1}{2}}T_sC'_w \\
&= q^{-\frac{1}{2}}T_s(q^{-\frac{1}{2}}(T_s+T_e)C'_{sw} - \sum_{sy<y<sw} \mu(y,sw)C'_y) \\
&= q^{-1}(T_s^2+T_s)C'_{sw} - \sum_{sy<y<sw} \mu(y,sw)q^{-\frac{1}{2}}T_sC'_y \\
&= q^{-1}(T_s^2+T_s)C'_{sw} - \sum_{sy<y<sw} \mu(y,sw)q^{\frac{1}{2}}C'_y \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= q^{-1}(qT_e+(q-1)T_s+T_s)C'_{sw} - q^{\frac{1}{2}}\sum_{sy<y<sw} \mu(y,sw)C'_y \\
&= (T_s+T_e)C'_{sw} - q^{\frac{1}{2}}\sum_{sy<y<sw} \mu(y,sw)C'_y \\
&= q^{\frac{1}{2}}(q^{-\frac{1}{2}}(T_s+T_e)C'_{sw} - \sum_{sy<y<sw} \mu(y,sw)C'_y) \\
&= q^{\frac{1}{2}}C'_w.
\end{aligned}$$

故に帰納法により題意が証明された. □

Proof of Th. 6.5.1:

(i) sw を w として Prop. 6.5.2 を適用すると Lem. 6.5.7-(i) での f_x は 0 であるので

$$\begin{aligned}
P^*_{x,w}(q) \quad &= \begin{cases} q^{\frac{1}{2}}P^*_{x,sw}(q) + P^*_{sx,sw}(q) & \text{if } sx < x \\ q^{-\frac{1}{2}}P^*_{x,sw}(q) + P^*_{sx,sw}(q) & \text{if } x < sx \end{cases} \\
&\quad - \sum_{sy<y<sw} \mu(y,sw)P^*_{x,y}(q).
\end{aligned}$$

$P^*_{x,w}(q)$ を $P_{x,w}(q)$ におきかえると

$$\begin{aligned}
q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)}{2}}P_{x,w}(q) \quad &= \begin{cases} q^{\frac{\ell(x)-\ell(sw)+1}{2}}P_{x,sw}(q) + q^{\frac{\ell(sx)-\ell(sw)}{2}}P_{sx,sw}(q) & \text{if } sx < x \\ q^{\frac{\ell(x)-\ell(sw)-1}{2}}P_{x,sw}(q) + q^{\frac{\ell(sx)-\ell(sw)}{2}}P_{sx,sw}(q) & \text{if } x < sx \end{cases} \\
&\quad - \sum_{sy<y<sw} q^{\frac{\ell(x)-\ell(y)}{2}}\mu(y,sw)P_{x,y}(q).
\end{aligned}$$

即ち

$$\begin{aligned} P_{x,w}(q) &= \begin{cases} qP_{x,sw}(q) + P_{sx,sw}(q) & \text{if } sx < x \\ P_{x,sw}(q) + qP_{sx,sw}(q) & \text{if } x < sx \end{cases} \\ &- \sum_{sy<y<sw} q^{\frac{\ell(w)-\ell(y)}{2}} \mu(y, sw) P_{x,y}(q). \end{aligned}$$

(ii) Prop. 6.5.2 より Lem. 6.5.7-(ii) での $g_x = 0$ であることを用いて示す.

Case 1. $sx < x$ のとき

$$P^*_{sx,w}(q) = q^{-\frac{1}{2}} P^*_{x,w}(q).$$

即ち

$$q^{\frac{\ell(sx)-\ell(w)}{2}} P_{sx,w}(q) = q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)-1}{2}} P_{x,w}(q).$$

よって

$$P_{sx,w}(q) = P_{x,w}(q).$$

Case 2. $s < sx$ のとき

$$P^*_{sx,w}(q) = q^{\frac{1}{2}} P^*_{x,w}(q).$$

即ち

$$q^{\frac{\ell(sx)-\ell(w)}{2}} P_{sx,w}(q) = q^{\frac{\ell(x)-\ell(w)+1}{2}} P_{x,w}(q).$$

従って

$$P_{sx,w}(q) = P_{x,w}(q). \quad \Box$$

$\{C_w; w \in W\}$ に関しても同様の関係式が成立している.

Cor. 6.5.8 $w \in W$, $s \in S$ とする.

(i) $w < sw$ のとき

$$T_s C_w = qC_w + q^{\frac{1}{2}} C_{sw} - q^{\frac{1}{2}} \sum_{sy<y<w} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)} \mu(y, w) C_y.$$

(ii) $sw < w$ のとき

$$T_s C_w = -C_w.$$

Proof:
まじめに計算して, 最後に Th. 6.5.1 を用いると容易に示せる.
(i)

$$
\begin{aligned}
&T_sC_w - qC_w - q^{\frac{1}{2}}C_{sw} + q^{\frac{1}{2}} \sum_{sy<y<w} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)}\mu(y,w)C_y \\
&= T_s \sum_{x\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x \\
&\quad -q \sum_{x\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x \\
&\quad -q^{\frac{1}{2}} \sum_{x\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(sw)} q^{\frac{\ell(sw)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,sw}(q)} T_x \\
&\quad +q^{\frac{1}{2}} \sum_{sy<y<w} (-1)^{\ell(y)+\ell(w)}\mu(y,w) \sum_{x\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(y)} q^{\frac{\ell(y)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,y}(q)} T_x \\
&= \sum_{sx<x} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} (qT_{sx} + (q-1)T_x) \\
&\quad + \sum_{x<sx} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_{sx} \\
&\quad -q \sum_{x\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x \\
&\quad -q^{\frac{1}{2}} \sum_{x\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(sw)} q^{\frac{\ell(sw)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,sw}(q)} T_x \\
&\quad +q^{\frac{1}{2}} \sum_{x\in W} \sum_{sy<y<w} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(y)}{2}-\ell(x)} \mu(y,w) \overline{P_{x,y}(q)} T_x \\
&= -\sum_{x<sx} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(sx)} \overline{P_{sx,w}(q)} qT_x \\
&\quad + \sum_{sx<x} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} (q-1)T_x \\
&\quad - \sum_{sx<x} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(sx)} \overline{P_{sx,w}(q)} T_x \\
&\quad -q \sum_{x\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x \\
&\quad +q^{\frac{1}{2}} \sum_{x\in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)+1}{2}-\ell(x)} \overline{P_{x,sw}(q)} T_x \\
&\quad + \sum_{x\in W} (q^{\frac{1}{2}} \sum_{sy<y<w} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(y)}{2}-\ell(x)} \mu(y,w) \overline{P_{x,y}(q)}) T_x
\end{aligned}
$$

左辺の T_x の係数を K_x とおく.
Case 1. $sx < x$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\ell(x)-\frac{\ell(w)}{2}} K_x \\
&= \overline{P_{x,w}(q)}(q-1) - q\overline{P_{sx,w}(q)} - q\overline{P_{x,w}(q)} + q\overline{P_{x,sw}(q)} \\
&\quad + q^{\frac{1}{2}} \sum_{sy<y<w} q^{\frac{\ell(y)-\ell(w)}{2}} \mu(y,w)\overline{P_{x,y}(q)} \\
&= -\overline{P_{x,w}(q)} - q\overline{P_{sx,w}(q)} + q\overline{P_{x,sw}(q)} + \sum_{sy<y<w} q^{\frac{\ell(y)-\ell(w)+1}{2}} \mu(y,w)\overline{P_{x,y}(q)} \\
&= q(-\overline{qP_{x,w}(q)} - \overline{P_{sx,w}(q)} + \overline{P_{x,sw}(q)} + \sum_{sy<y<w} q^{\frac{\ell(y)-\ell(w)-1}{2}} \mu(y,w)\overline{P_{x,y}(q)}) \\
&= q\overline{(-qP_{x,w}(q) - P_{sx,w}(q) + P_{x,sw}(q) + \sum_{sy<y<w} q^{\frac{\ell(sw)-\ell(y)}{2}} \mu(y,w)P_{x,y}(q))} \\
&= 0 \quad (\because \text{Th. 6.5.1})
\end{aligned}
$$

Case 2. $x < sx$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\ell(x)-\frac{\ell(w)}{2}} K_x \\
&= -\overline{P_{sx,w}(q)} - q\overline{P_{x,w}(q)} + q\overline{P_{x,sw}(q)} + q^{\frac{1}{2}} \sum_{sy<y<w} q^{\frac{\ell(y)-\ell(w)}{2}} \mu(y,w)\overline{P_{x,y}(q)} \\
&= q(-\overline{qP_{sx,w}(q)} - \overline{P_{x,w}(q)} + \overline{P_{x,sw}(q)} + \sum_{sy<y<w} q^{\frac{\ell(y)-\ell(w)-1}{2}} \mu(y,w)\overline{P_{x,y}(q)}) \\
&= q\overline{(-qP_{sx,w}(q) - P_{x,w}(q) + P_{x,sw}(q) + \sum_{sy<y<w} q^{\frac{\ell(sw)-\ell(y)}{2}} \mu(y,w)P_{x,y}(q))} \\
&= 0 \quad (\because \text{Th. 6.5.1})
\end{aligned}
$$

従って (i) が証明された.
(ii)

$$
\begin{aligned}
&T_sC_w + C_w \\
&= T_s \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x + \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x \\
&= \sum_{sx<x} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} (qT_{sx} + (q-1)T_x) \\
&\quad + \sum_{x<sx} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_{sx} + \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x \\
&= -\sum_{x<sx} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}} q^{-\ell(sx)} \overline{P_{sx,w}(q)} q T_x \\
&\quad + \sum_{sx<x} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} (q-1) T_x \\
&\quad - \sum_{sx<x} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}} q^{-\ell(sx)} \overline{P_{sx,w}(q)} T_x \\
&\quad + \sum_{x \in W} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} T_x \\
&= \sum_{sx<x} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}} (q^{-\ell(x)} (q-1) \overline{P_{x,w}(q)} - q^{-\ell(sx)} \overline{P_{sx,w}(q)} + q^{-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)}) T_x \\
&\quad + \sum_{x<sx} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2}} (q^{-\ell(x)} \overline{P_{x,w}(q)} - q^{-\ell(sx)} q \overline{P_{sx,w}(q)}) T_x \\
&= \sum_{sx<x} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(sx)} (\overline{P_{x,w}(q)} - \overline{P_{sx,w}(q)}) T_x \\
&\quad + \sum_{x<sx} (-1)^{\ell(x)+\ell(w)} q^{\frac{\ell(w)}{2} - \ell(x)} (\overline{P_{x,w}(q)} - \overline{P_{sx,w}(q)}) T_x \\
&= 0 \quad (\because \text{Th. 6.5.1-(ii)})
\end{aligned}
$$

従って (ii) が証明された. □

参考文献

[1] D. Alvis, *The left cells of the Coxeter group of type H_4*, J. Algebra 107 (1987), 160–168.

[2] B. D. Boe, *A Counterexample to the Gabber-Joseph Conjecture*, Contemporary Math. 139 (1992), 1–3.

[3] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. 4,5, et 6, Hermann, Paris, 1968.

[4] F. Brenti, *A combinatorial formula for Kazhdan-Lusztig polynomials*, Invent. math. 118 (1994), 371–394.

[5] F. Brenti, *Upper and Lower Bounds for Kazhdan-Lusztig polynomials*, European J. Combinatorics 19 no.3 (1998), 282–297.

[6] M. Dyer, *Hecke algebras and reflections in Coxeter groups*, thesis, Univ. of Sydney (1987).

[7] M. Dyer, *On coefficients of q in Kazhdan-Lusztig polynomials*, Algebraic groups and Lie groups, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., 9 (1997), 189–194.

[8] Z. Haddad, *Infinite dimensional flag varieties*, thesis, M.I.T. (1984).

[9] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[10] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Representation of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. math. 53 (1979), 165–184.

[11] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proc. Symp. in Pure Math. 36 (1980), 185–203.

[12] H. Tagawa, *On the non-negativity of the first coefficient of Kazhdan-Lusztig polynomials*, J. Algebra 177 (1995), 698–707.

[13] H. Tagawa, *Kazhdan-Lusztig polynomials of Parabolic Type*, J. Algebra 200 (1998), 258–278.