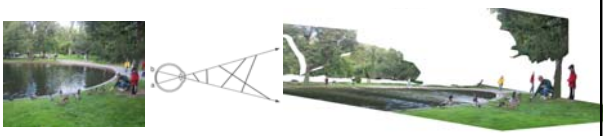
視覚の幾何学1

呉海元＠和歌山大学

参考書
佐藤　淳：
「コンピュータビジョン　ー視覚の幾何学ー」
コロナ社

Single view geometry

projections

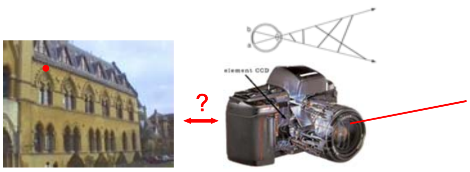


?

Camera model
Single view geom.

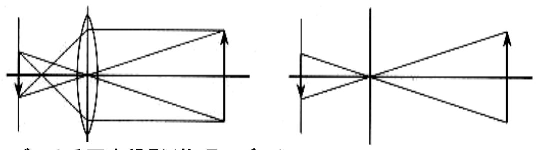
カメラモデル（Camera model）

画像内の一点と3次元空間中の光線の関係

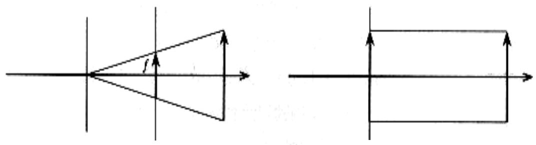


投影（Projections）・射影関係によって決定
⇒　この関係を記述するカメラモデルが複数ある

投影による3次元空間から2次元画像への変換



レンズによる写真投影（物理モデル）　ピンホールカメラ投影

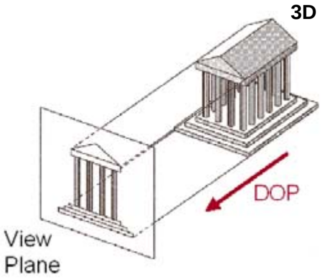


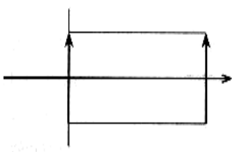
射影・透視変換（中心投影）　正射影（平行投影）

平行投影・正射影モデル (Orthographic)

3D point　2D image position

$$(X,Y,Z)\rightarrow(x,y)$$



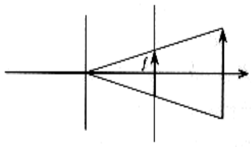


(d) 正射影（平行投影）

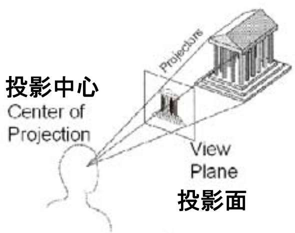
透視投影モデル(Perspective)

3D point　2D image position

$$(X,Y,X)\rightarrow\left(\frac{fX}{Z},\frac{fY}{Z}\right)$$

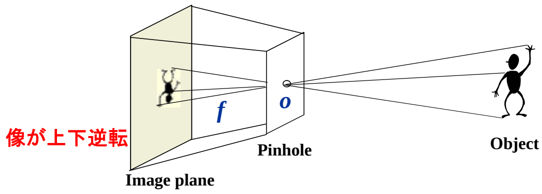


(c) 透視変換（中心投影）



物理モデルに一番近い

ピンホール・カメラ(pinhole camera)



- ●撮像素子が置かれる面を画像面I (image plane)
- ●全ての光が通過する点(pinhole)を光学中心o(optical center)
- ●光学中心と画像面の間の距離を焦点距離f (focal length)

特徴:

- ●ピント合わせの必要がない
- ●投影の幾何学的な性質がそのまま保存されている
- ●視覚の幾何を考える上で理想的な性質を持つ

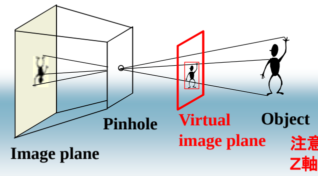
ピンホール・カメラから 透視投影 (Perspective Projection)へ

●仮想的に画像面(Virtual image plane)を光学中心の前(対象物側)に置くと、像が上下逆転せずに投影される

⇒ 投影がより扱いやすくなる

●普通、画像面を対象物側に置いて考える

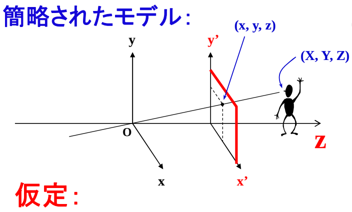
もちろん、光学中心の後ろのまま考える場合もある



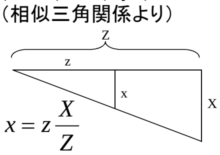
注意:
Z軸の方向や画像面の場所によって、数式の±記号の差がある

透視投影モデル

簡略されたモデル:



(X,Y,Z)から(x,y,z)へ投影:
(相似三角関係より)



$$x = z\frac{X}{Z}$$

$$y = z\frac{Y}{Z}$$

$$z = z \qquad (f = z)$$

仮定:

1. 原点をレンズの中心に
2. Z軸と光軸と平行

●透視投影はZに関し非線形である

★幾何関係だけ考える理論系の人はよく$f = z$=1とする

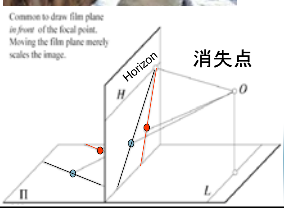
透視投影の画像

Amsterdam: what do you see in this picture?

- •straight line
- •size
- •parallelism/angle
- •shape
- •shape of planes
- •depth

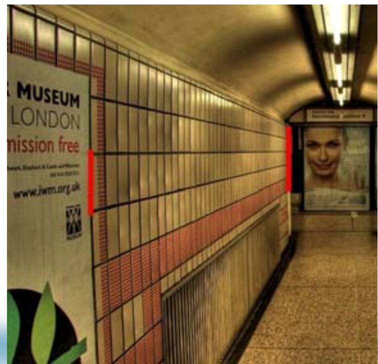
Photo by Robert Kosara, robert@kosara.net
http://www.kosara.net/gallery/pinholeamsterdam/pic01.html

透視投影（まとめ）



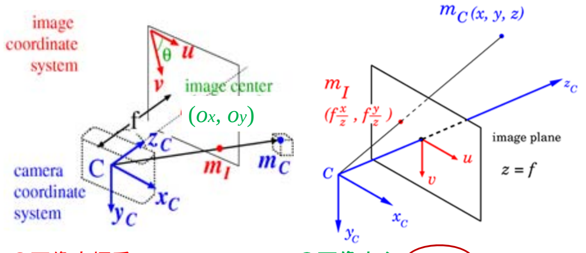
- 点⇒点
- 線⇒線
- 面⇒面
- ポリゴン⇒ポリゴン
- 遠い物体が小さい
- 奥行き情報が得られない

Linear Perspective



(c) 2006 Walt Anthony

カメラの内部パラメータI



●画像座標系：(x_{image}, y_{image})　●画像中心 (o_x, o_y)
●カメラ座標系：(x_{camera}, y_{camera})
●ワールド座標系Real world coordinates (X, Y, Z)
●焦点距離Focal length f
●画素の有効サイズEffective size of pixel in millimeter (k_x, k_y)

カメラと画像間のパラメータ

$$u = x_{image} = k_x x_{camera} + o_x$$
$$v = y_{image} = k_y y_{camera} + o_y$$

行列・ベクトルを導入

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{image} \\ y_{image} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{camera} \\ y_{camera} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \end{bmatrix}$$

同次座標系を導入

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{image} \\ y_{image} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & o_x \\ 0 & k_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{camera} \\ y_{camera} \\ 1 \end{bmatrix}$$

同次座標系を導入することによって、
複雑な座標変換がすべて行列の積で処理できる

同次座標導入の利点

- 同次座標を使わない場合
  - 一回目のアフィン変換　$\mathbf{P}' = \mathbf{M}_1\mathbf{P} + \mathbf{b}_1$
  - 二回目のアフィン変換　$\mathbf{P}'' = \mathbf{M}_2\mathbf{P}' + \mathbf{b}_2$
    $\mathbf{P}'' = \mathbf{M}_2(\mathbf{M}_1\mathbf{P} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2$
    $\mathbf{P}'' = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{P} + \mathbf{M}_2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$
- 同次座標を導入した場合　$\mathbf{P}' = \mathbf{A}_1\mathbf{P}$
  $\mathbf{P}'' = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{P}$
- メリット：
- 座標変換を全て行列の乗算で処理可能
- 線形代数の原理原則は全部使えるようになる

同次座標系Homogenous Coordinates

2次元座標変換（回転＋移動）：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{積} \underbrace{+ \boxed{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}}_{和} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

1つ次元を上げると･･･

積のみ！

3次元座標変換（回転＋移動）：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

1つ次元を上げると･･･

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

ピンホールカメラモデル
ワールド座標系と理想なカメラの関係

$$\begin{bmatrix} x_{camera} \\ y_{camera} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

カメラの内部パラメータ

カメラ座標系と画像座標系の関係：

$$x_{image} = k_x x_{camera} + o_x$$
$$y_{image} = k_y y_{camera} + o_y$$

$$\begin{bmatrix} x_{image} \\ y_{image} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & o_x \\ 0 & k_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{camera} \\ y_{camera} \\ 1 \end{bmatrix}$$

⇒A行列

ワールド座標系と画像座標系の関係：

$$\begin{bmatrix} x_{image} \\ y_{image} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & o_x \\ 0 & k_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

カメラの内部パラメータ(K行列)

$$\begin{bmatrix} x_{image} \\ y_{image} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & o_x \\ 0 & k_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fk_x & 0 & o_x & 0 \\ 0 & fk_y & o_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

⇒K行列

●画像座標系:(x_{image}, y_{image})
●画像中心:(o_x, o_y)
●カメラ座標系:(x_{camera}, y_{camera})
●ワールド座標系 (X, Y, Z)
●焦点距離 f
●画素の有効サイズ (k_x, k_y)

内部パラメータ(Intrinsic Camera Parameters)はワールド座標系内のカメラの位置と姿勢と依存しない

カメラの内部パラメータII

- レンズのひずみ
  Lens Distortions

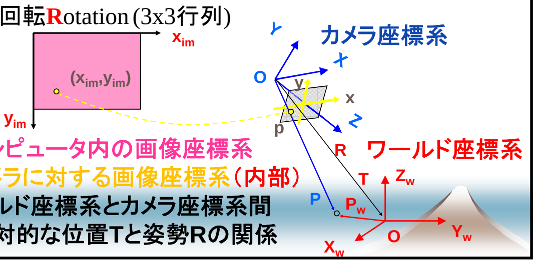
(x, y) ⟸ (xd, yd)

$$x_d = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4)$$
$$y_d = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4)$$

- Modeled as simple radial distortions
- $r^2 = xd^2 + yd^2$
- (xd , yd) distorted points
- k1 , k2: distortion coefficients

カメラの外部パラメータ
Extrinsic Camera Parameters

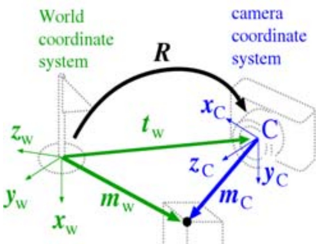
- 外部パラメータはワールド座標系内のカメラ座標系の位置Tと姿勢Rによって決定される
  - 平行移動Translation (3x1ベクトル)
  - 回転Rotation (3x3行列)



コンピュータ内の画像座標系
カメラに対する画像座標系(内部)

ワールド座標系とカメラ座標系間の絶対的な位置Tと姿勢Rの関係

カメラ座標とワールド座標

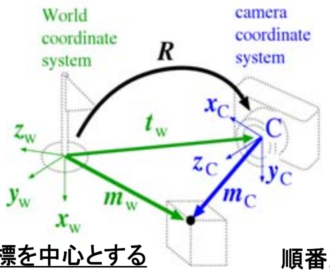


ワールド座標を中心とする　　順番がある

ワールド座標とカメラ座標の関係(回転後平行移動)

$$m_c = Rm_w + t_w \qquad m_w = R^{-1}(m_c - t_w) = R^T(m_c - t_w)$$

カメラ座標とワールド座標



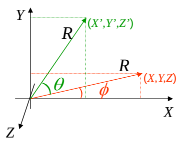
ワールド座標を中心とする　　順番がある

ワールド座標とカメラ座標の関係(平行移動後回転)

$$m_C = R(m_W - t_W) \quad \cdot \quad m_W = R^T m_C + t_W$$

Z-軸周りの回転(Rotation)

- Z-軸周り



変換前: $X = R\cos\phi$
$Y = R\sin\phi$

変換後:　　変換前と変換後の関係:

$$X' = R\cos(\phi+\theta) = \overbrace{R\cos\phi}^{X}\cos\theta - \overbrace{R\sin\phi}^{Y}\sin\theta$$

$$Y' = R\sin(\phi+\theta) = \overbrace{R\cos\phi}^{X}\sin\theta + \overbrace{R\sin\phi}^{Y}\cos\theta$$

$$X' = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$Y' = X\sin\theta + Y\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \begin{matrix}0 & 0\end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

回転(Rotation)行列の特性

- Inverse rotation

$$\mathbf{R}^Z.(\mathbf{R}^Z)^T = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

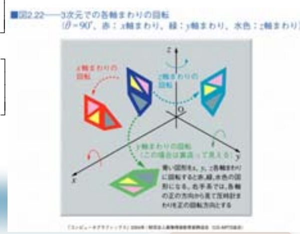
- 回転行列は直交行列!! $\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{R}^T, i.e.\ \mathbf{R}\mathbf{R}^T=\mathbf{R}^T\mathbf{R}=\mathbf{I}$

$$\mathbf{R}_i^T\cdot\mathbf{R}_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

3軸の回転(Rotation)

- X-軸周り $\mathbf{R}^x=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$
- Y-軸周り $\mathbf{R}^y=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$
- Z-軸周り $\mathbf{R}^z=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
- 回転なし $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

■図2.22――3次元での各軸まわりの回転 ($\theta=90°$, 赤:x軸まわり, 緑:y軸まわり, 水色:z軸まわり)

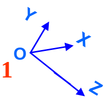


回転行列とEuler角

- γ, β, α はX, Y, Z軸周りの回転角 $\mathbf{R}=\mathbf{R}_Z^\alpha\mathbf{R}_Y^\beta\mathbf{R}_X^\gamma$

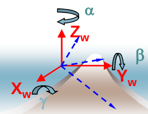
$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\gamma & -\cos\beta\sin\gamma & \sin\beta\\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}$$

- 注意:
  - 一回一つの角度しか回転できない
  - 順番と関係がある



- If angle θ is small, then $\cos\theta=1$ and $\sin\theta=\theta$ また $\theta * \theta + \theta = \theta$

近似された行列 $\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & -\gamma & \beta\\ \gamma & 1 & -\alpha\\ -\beta & \alpha & 1\end{bmatrix}$



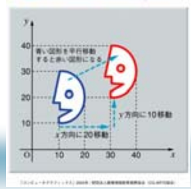
平行移動(Translation)

- (t_x, t_y, t_z) Translation vector

$$\begin{bmatrix}X_{camera}\\ Y_{camera}\\ Z_{camera}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{world}\\ Y_{world}\\ Z_{world}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t_x\\ t_y\\ t_z\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}X_{camera}\\ Y_{camera}\\ Z_{camera}\\ 1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & t_x\\ 0 & 1 & 0 & t_y\\ 0 & 0 & 1 & t_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\text{Translation Matrix}}\begin{bmatrix}X_{world}\\ Y_{world}\\ Z_{world}\\ 1\end{bmatrix}$$

3次元
同次座標

■図2.3――平行移動の例 ($t_x=20, t_y=10$)



$$\begin{bmatrix}X_{camera}\\ Y_{camera}\\ Z_{camera}\\ 1\end{bmatrix}=\mathbf{t}\begin{bmatrix}X_{world}\\ Y_{world}\\ Z_{world}\\ 1\end{bmatrix}$$

ピンホールカメラモデル、f=1

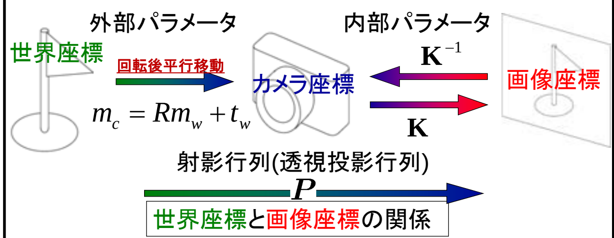
平行移動(Translation)行列の特性

- Inverse translation

$$\mathbf{t}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & t_x\\ 0 & 1 & 0 & t_y\\ 0 & 0 & 1 & t_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{t}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -t_x\\ 0 & 1 & 0 & -t_y\\ 0 & 0 & 1 & -t_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t}\mathbf{t}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & t_x\\ 0 & 1 & 0 & t_y\\ 0 & 0 & 1 & t_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -t_x\\ 0 & 1 & 0 & -t_y\\ 0 & 0 & 1 & -t_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}$$

座標間の関係



カメラの外部パラメータ

- ワールド座標系とカメラ座標系の下（回転後平行移動）
- t_x, t_y, t_z と $r_{1,1} \ldots r_{3,3}$ はカメラ外部パラメータ

$$\mathbf{X}_{camera} = R\mathbf{X}_{world} + T$$

$$\begin{bmatrix} X_{camera} \\ Y_{camera} \\ Z_{camera} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix}}_{\text{外部パラメータ}} \begin{bmatrix} X_{world} \\ Y_{world} \\ Z_{world} \\ 1 \end{bmatrix}$$

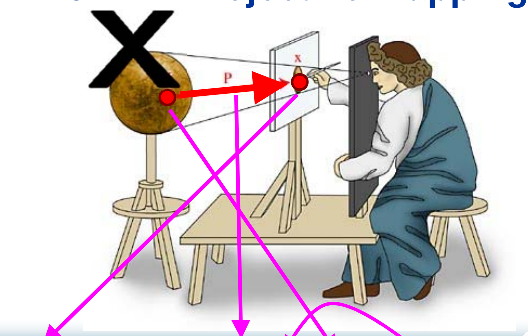
カメラのパラメータ

- ワールド座標系と画像座標系の下で

$$\begin{bmatrix} x_{image} \\ y_{image} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fk_x & 0 & o_x & 0 \\ 0 & fk_y & o_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{camera} \\ Y_{camera} \\ Z_{camera} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{image} \\ y_{image} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} fk_x & 0 & o_x & 0 \\ 0 & fk_y & o_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{内部パラメータ}} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} & t_x \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} & t_y \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{外部パラメータ}}}_{\text{P行列}} \begin{bmatrix} X_{world} \\ Y_{world} \\ Z_{world} \\ 1 \end{bmatrix}$$

3D-2D Projective mapping



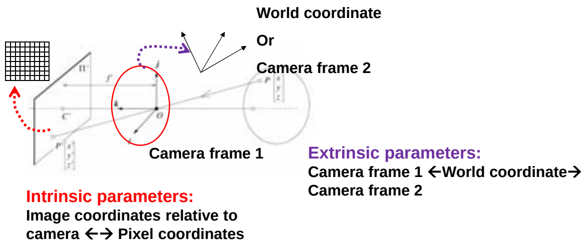
$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\,\mathbf{X}$$

Projection Matrix (3x4)

出席チェック

1. ピンホールカメラ（透視投影モデル）の原理図を描き、撮影された画像の特徴について述べなさい
2. カメラの内部パラメータ、外部パラメータは？
3. 同次座標系導入の利点について述べなさい

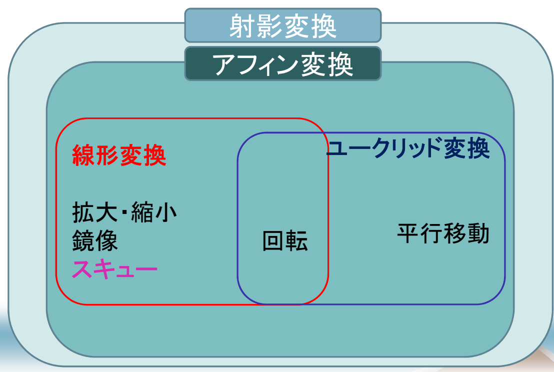
Camera parameters（まとめ）



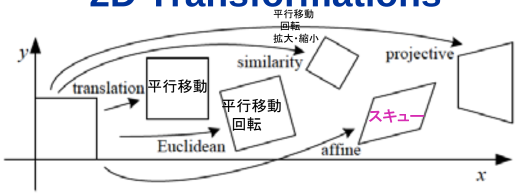
- *Extrinsic* params: rotation matrix and translation vector
- *Intrinsic* params: focal length, pixel sizes (mm), image center point, radial distortion parameters

Slide credit: Kristen Grauman

幾何学的変換の関係

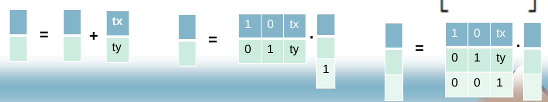


2D Transformations



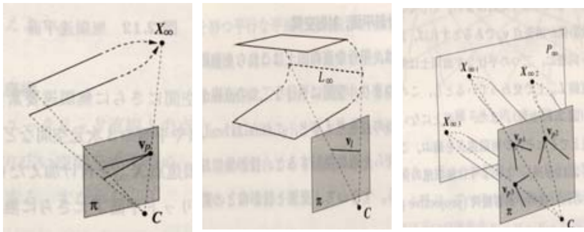
Example: translation

$$x' = x + t \qquad x' = \begin{bmatrix} I & t \end{bmatrix}\bar{x} \qquad \bar{x}' = \begin{bmatrix} I & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}\bar{x}$$



Now we can chain transformations

無限遠要素



無限遠点　無限遠直線　無限遠平面

2次元アフィン変換

アフィン変換は線型変換(回転、拡大縮小、剪断)と平行移動の組み合わせ

平行移動 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

拡大・縮小 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

一般化！ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

アフィン変換

回転 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

せん断 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x \\ sh_y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

同次座標の基本2D変換

- Basic 2D transformations as 3x3 matrices

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

平行移動Translate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

拡大・縮小Scale

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

回転Rotate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

せん断Shear

行列の合成

- 複雑な座標変換の行列は各処理の行列の掛け算から合成

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

p' = **T**(t_x,t_y) **R**(Θ) **S**(s_x,s_y) **p**

3次元アフィン変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

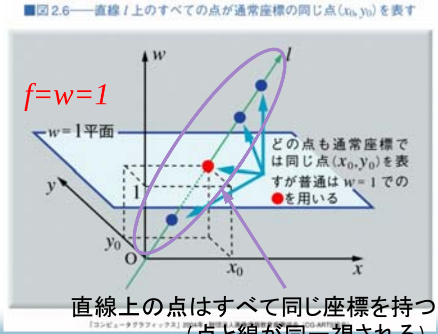
2次元　3次元

P(x, y, z) から**P**(x', y', z') へのアフィン変換（同次座標による表現）

$$\mathbf{P}' = \mathbf{AP}$$

（**A**： アフィン変換行列）

同次座標系導入の利点



直線上の点はすべて同じ座標を持つものとする
（点と線が同一視される）