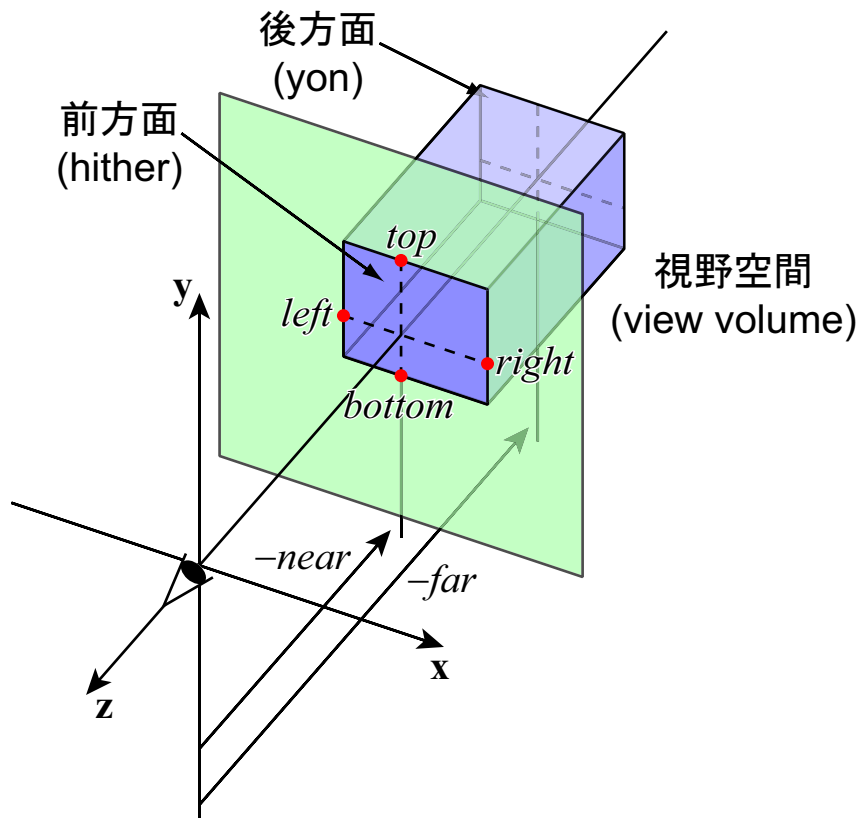


# コンピュータグラフィックス

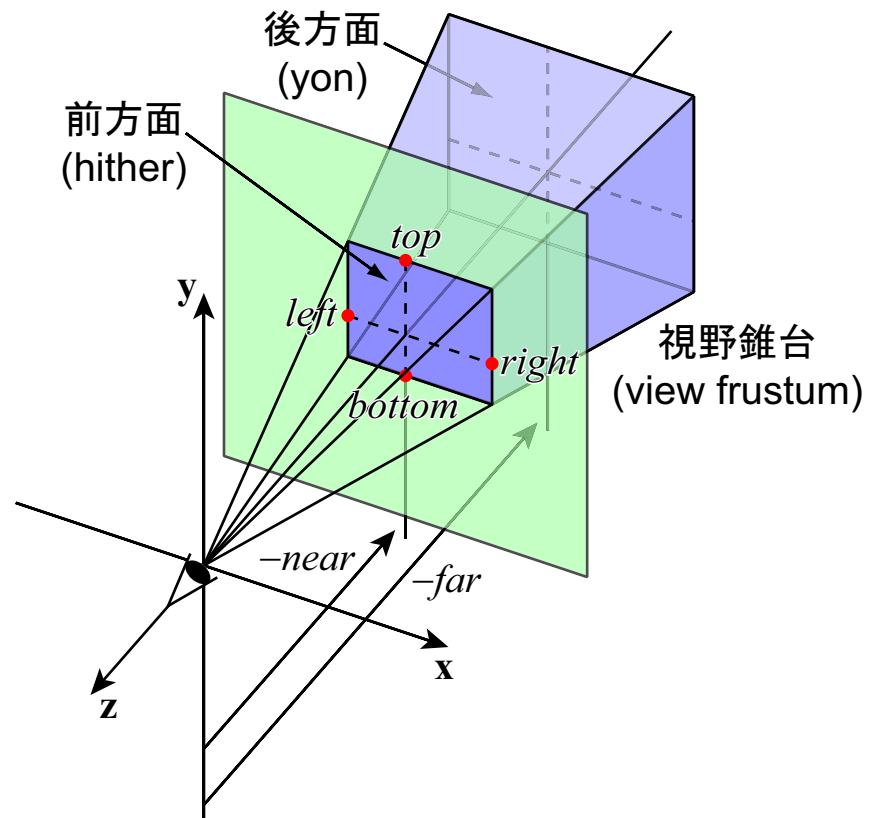
## 第8回：スクリーンに映す

# 投影

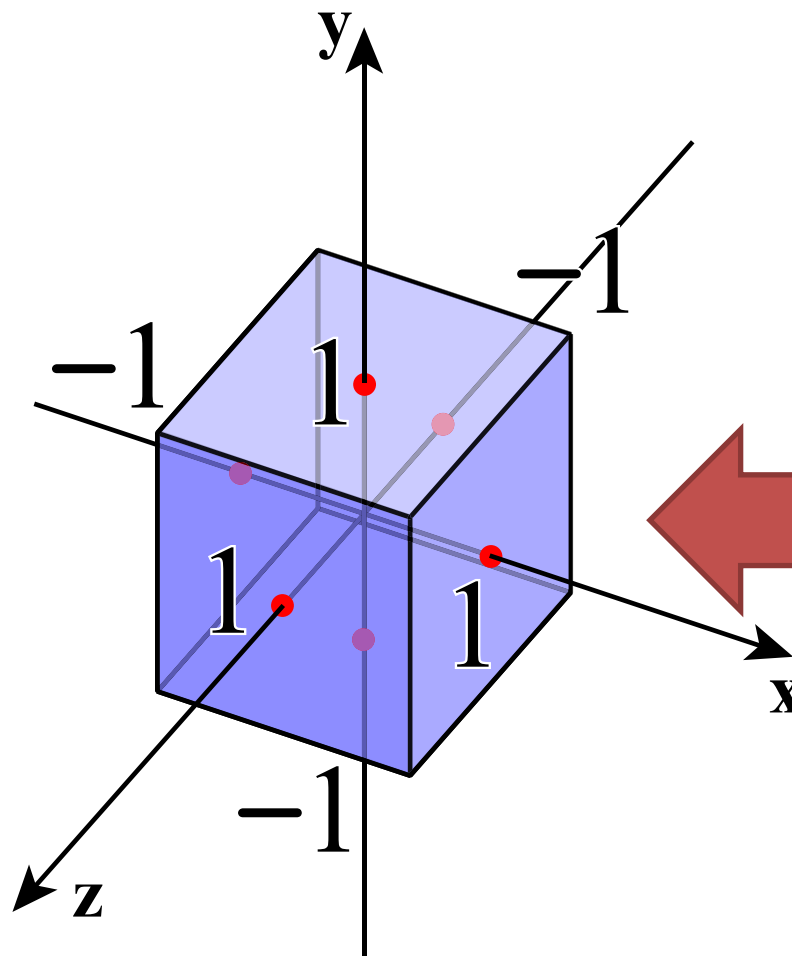
## 直交投影 (平行投影)



## 透視投影

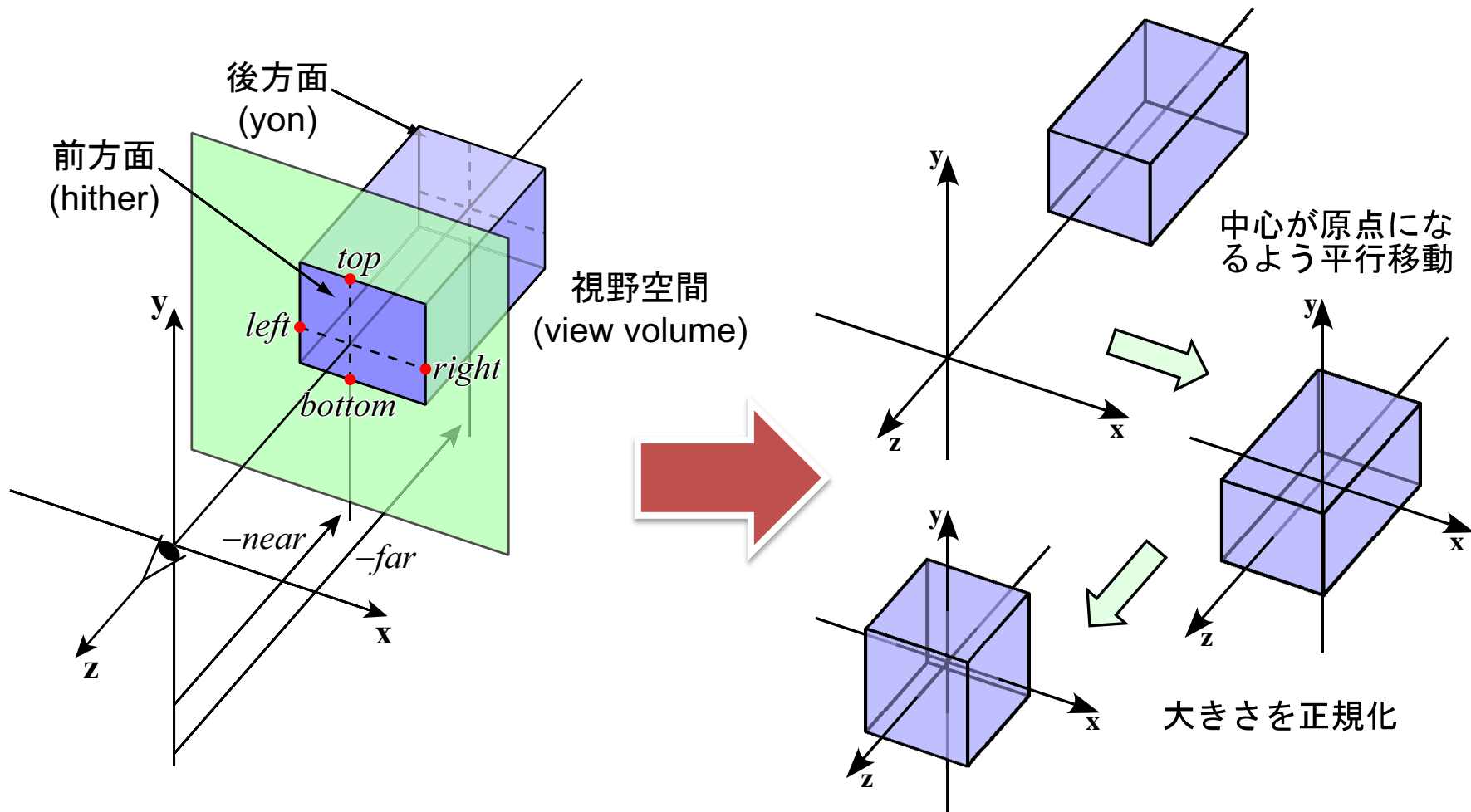


# クリッピング空間

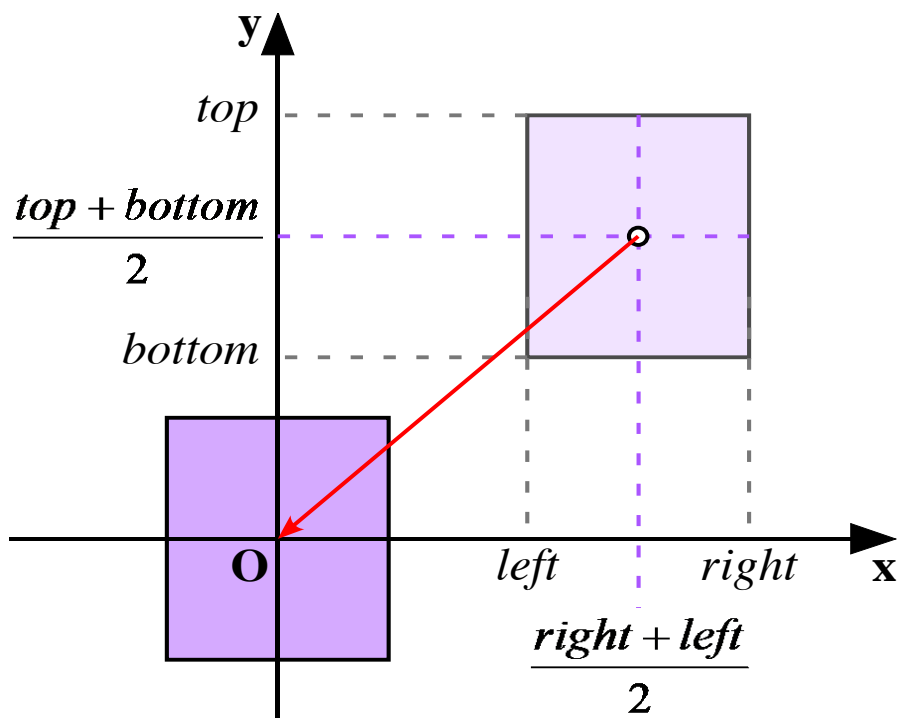


この空間内にあるものが描かれる

# 直交投影 (平行投影)

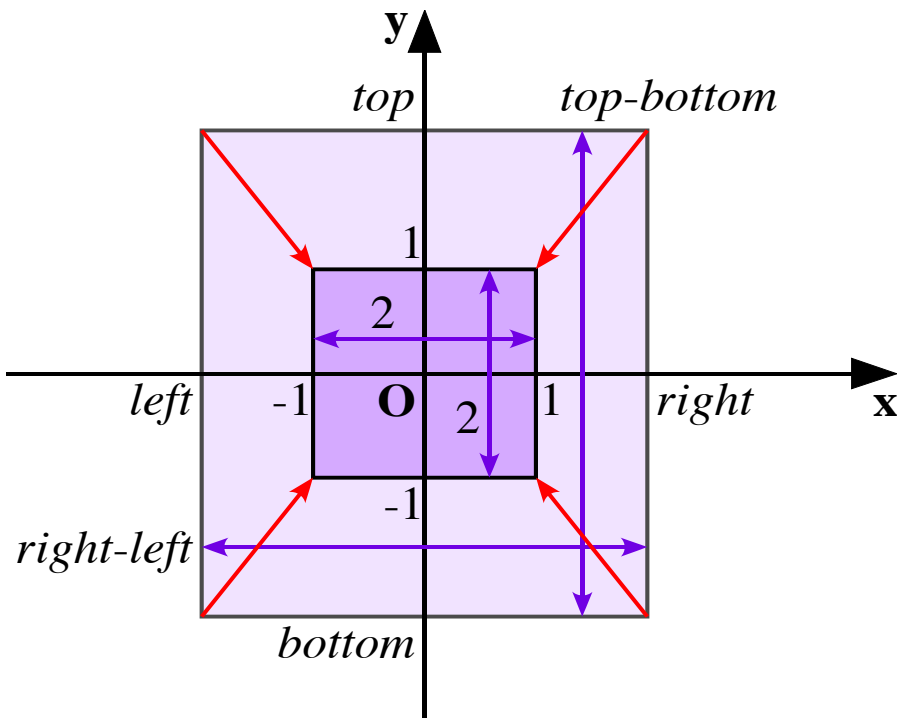


# 中心に平行移動



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{right + left}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{top + bottom}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{far + near}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# スケーリングして大きさを正規化



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\text{right} - \text{left}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\text{top} - \text{bottom}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\text{far} - \text{near}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

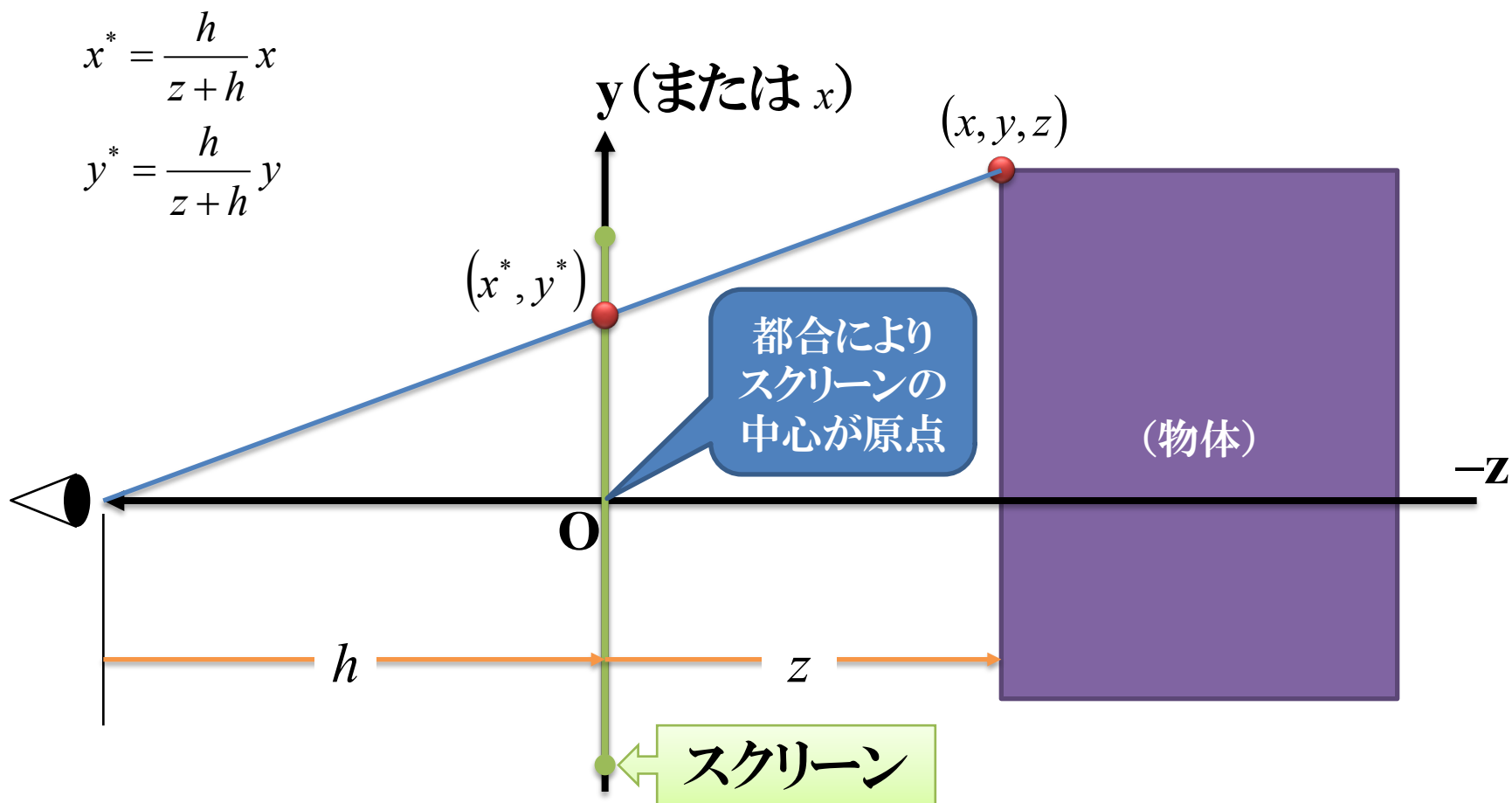
# 直交投影 (平行投影) 変換行列

スケールング (正規化)

平行移動

$$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far - near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{right + left}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{top + bottom}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{far + near}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & -\frac{right + left}{right - left} \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & -\frac{top + bottom}{top - bottom} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far - near} & -\frac{far + near}{far - near} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

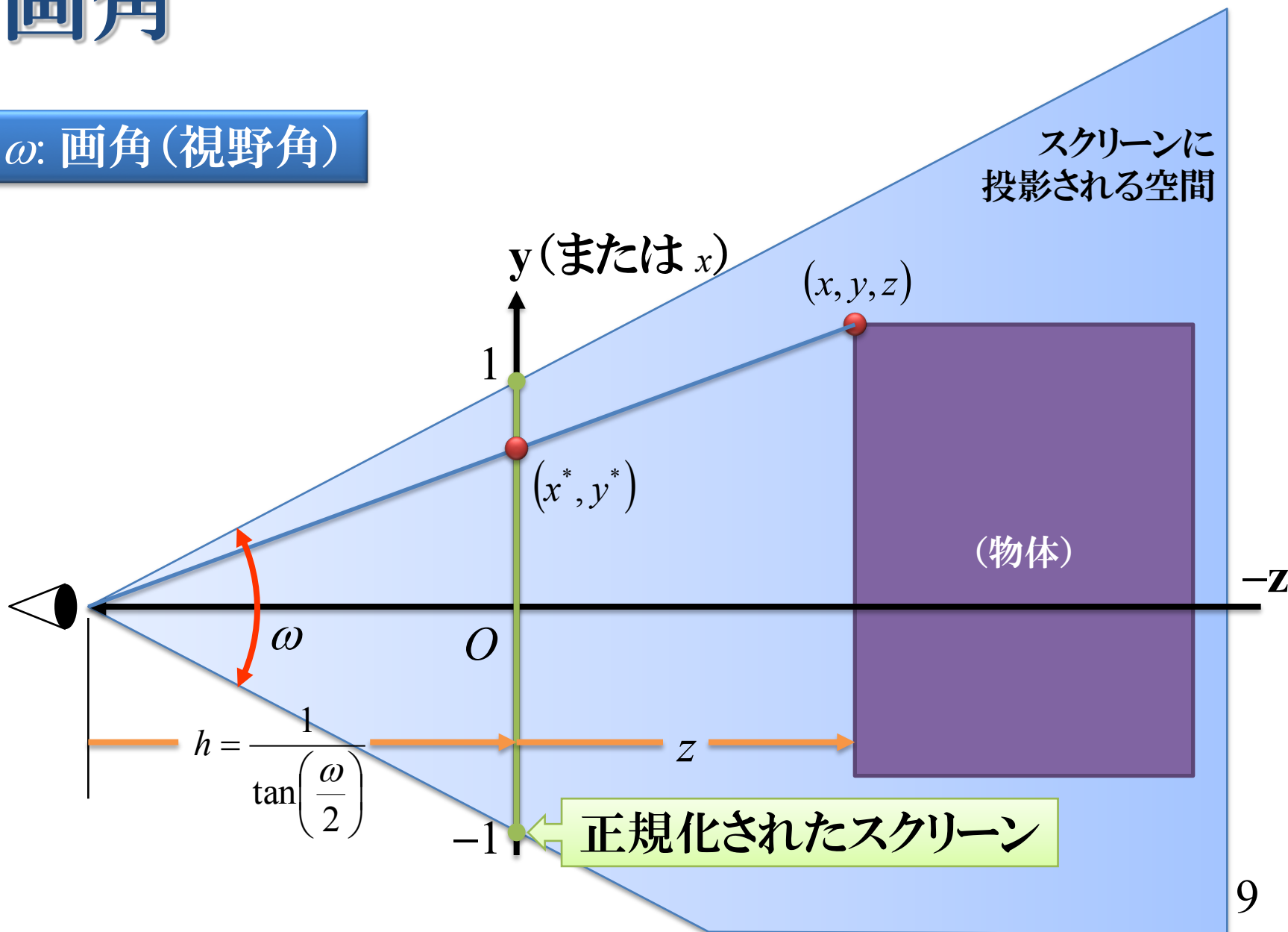
# 透視投影





# 画角

$\omega$ : 画角 (視野角)



# 透視変換行列

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{h}{z+h} x \\ y^* &= \frac{h}{z+h} y \end{aligned} \right\} \frac{h}{z+h} \text{ で } x, y \text{ を割る} \Rightarrow w = \frac{1}{\frac{z}{h} + 1} = \frac{z}{z+h} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/h+1 \end{pmatrix}$$

## 変換行列

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z/h+1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x'}{w'} = \frac{1}{z/h+1} x = \frac{h}{z+h} x \\ y^* &= \frac{y'}{w'} = \frac{1}{z/h+1} y = \frac{h}{z+h} y \\ z^* &= \frac{z'}{w'} = \frac{1}{z/h+1} z = \frac{h}{z+h} z \end{aligned}$$

透視深度

# 透視深度の正規化

$$z^* = \frac{z'}{w'} = \frac{1}{z/h+1} z = \frac{h}{z+h} z \quad \longrightarrow \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{h}{z+h} z = 0, \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{h}{z+h} z = h \quad \longrightarrow \quad 0 \leq z^* \leq h$$

$$0 \leq z^* \leq h \quad \longrightarrow \quad -1 \leq z_c \leq 1 \quad (z_c: \text{クリッピング座標系の座標値})$$

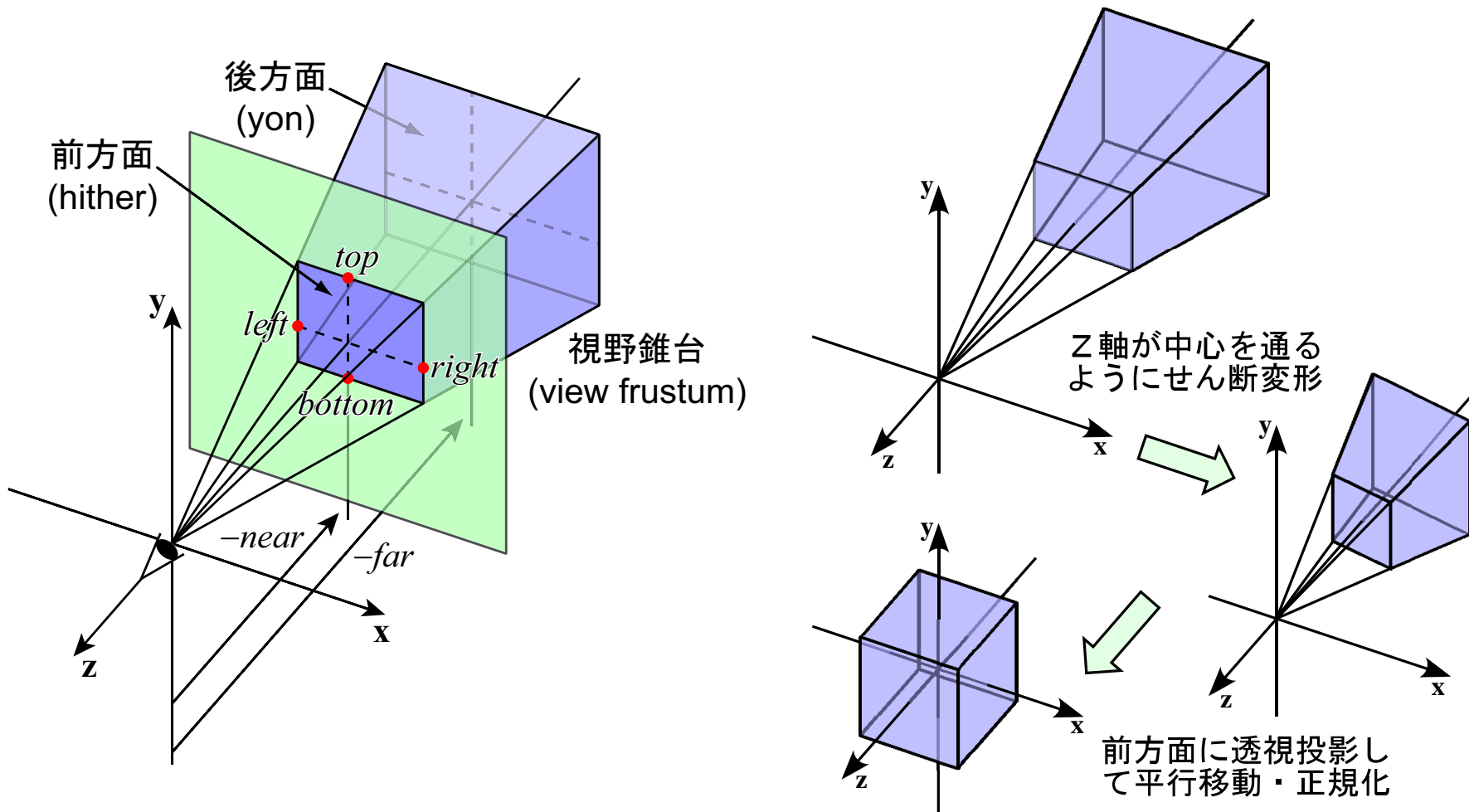
2/h 倍して 1 を引く

$$z^* = \frac{2}{z+h} z - 1 = \frac{z-h}{z+h}$$

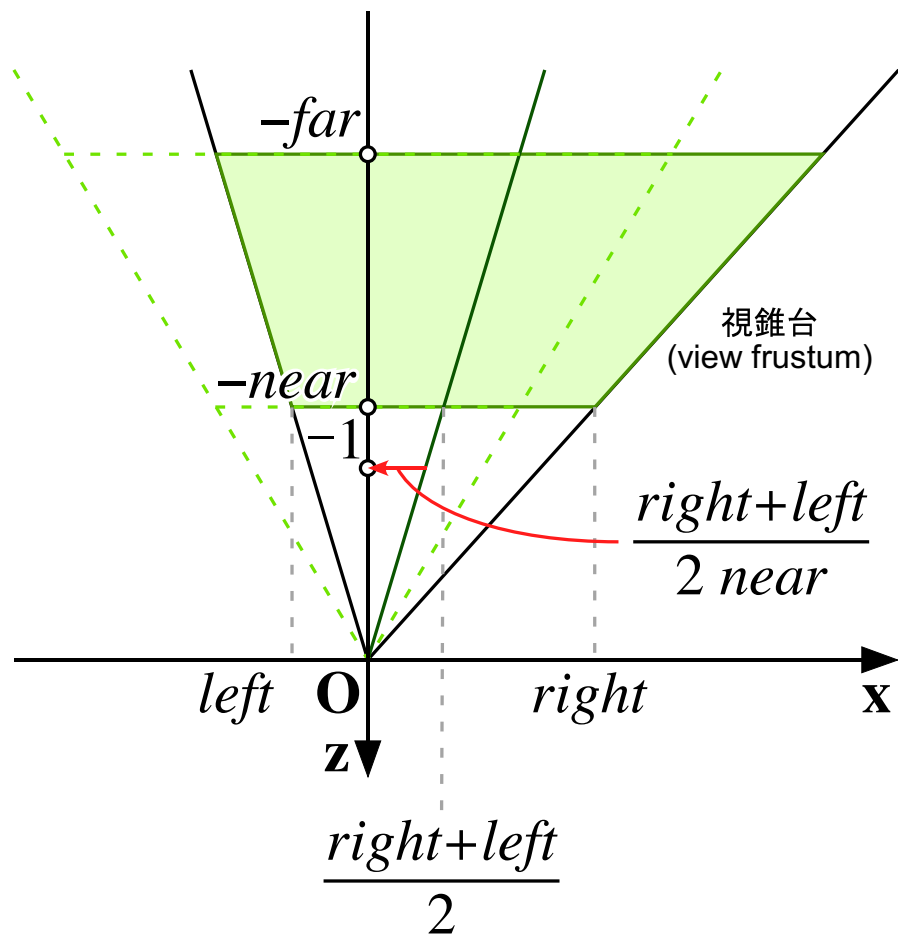
## 変換行列

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/h & -1 \\ 0 & 0 & 1/h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z/h - 1 \\ z/h + 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x^* &= \frac{x'}{w'} = \frac{h}{z+h} x \\ y^* &= \frac{y'}{w'} = \frac{h}{z+h} y \\ z^* &= \frac{z'}{w'} = \frac{z-h}{z+h} \end{aligned}$$

# 視野錐台による透視投影

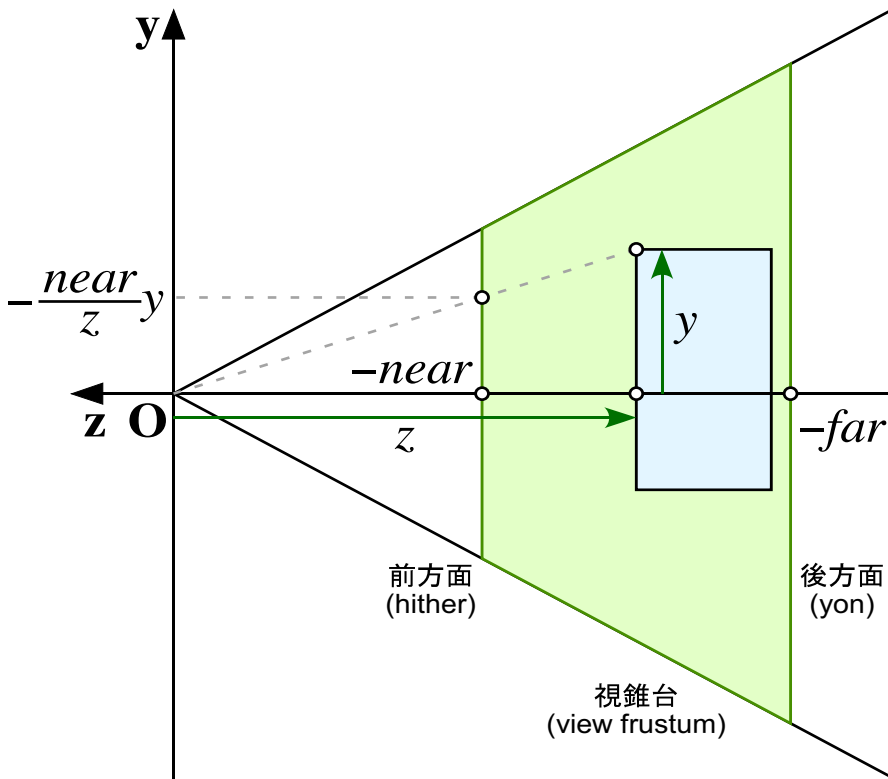


# せん断変形



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{right + left}{2 \cdot near} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{top + bottom}{2 \cdot near} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 透視投影



$$x^* = -\frac{near}{z} x$$

$$y^* = -\frac{near}{z} y$$

$$z^* = -\frac{far + near}{2} - \frac{far \cdot near}{z}$$

透視深度

# 透視投影變換行列

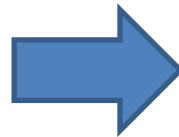
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far + near}{2} & far\ near \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = near\ x$$

$$y' = near\ y$$

$$z' = \frac{far + near}{2} z + far\ near$$

$$w' = -z$$

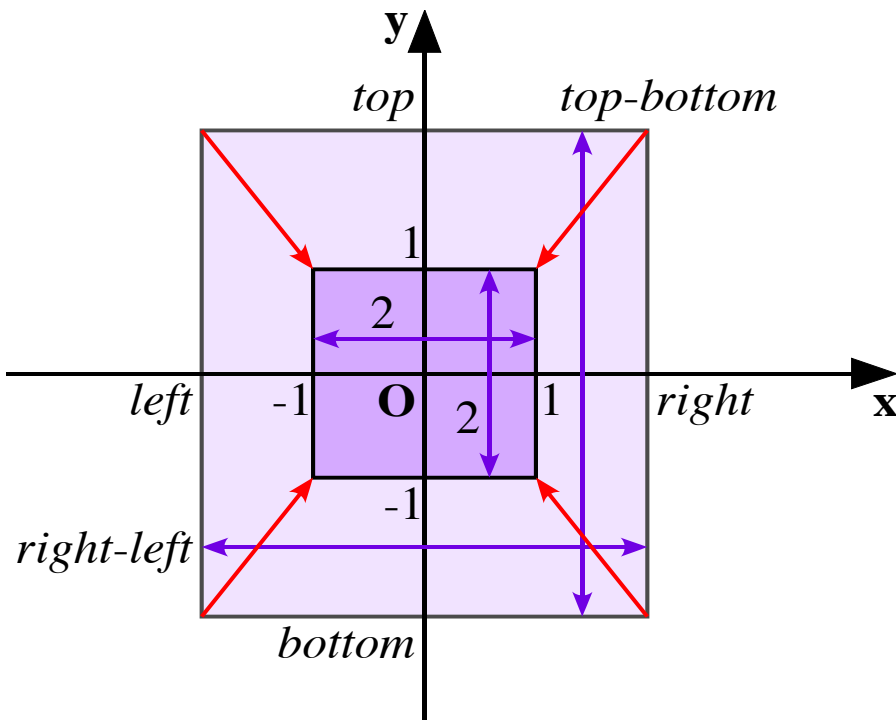


$$x^* = -\frac{near}{z} x$$

$$y^* = -\frac{near}{z} y$$

$$z^* = -\frac{far + near}{2} - \frac{far\ near}{z}$$

# スケーリングして大きさを正規化



$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\text{right} - \text{left}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\text{top} - \text{bottom}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{\text{far} - \text{near}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# 視野錐台による透視投影変換行列

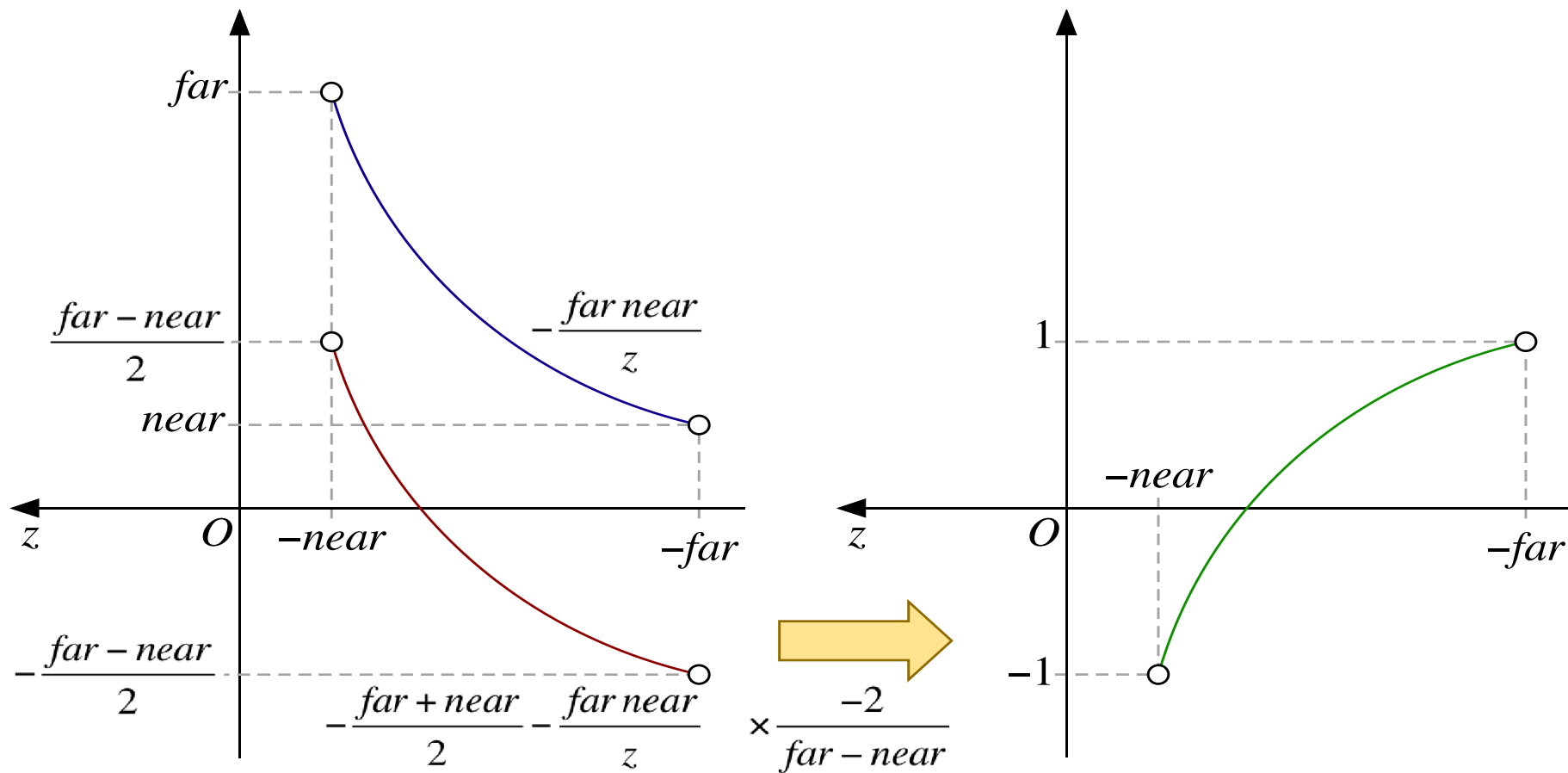
スケールング (正規化)

透視変換

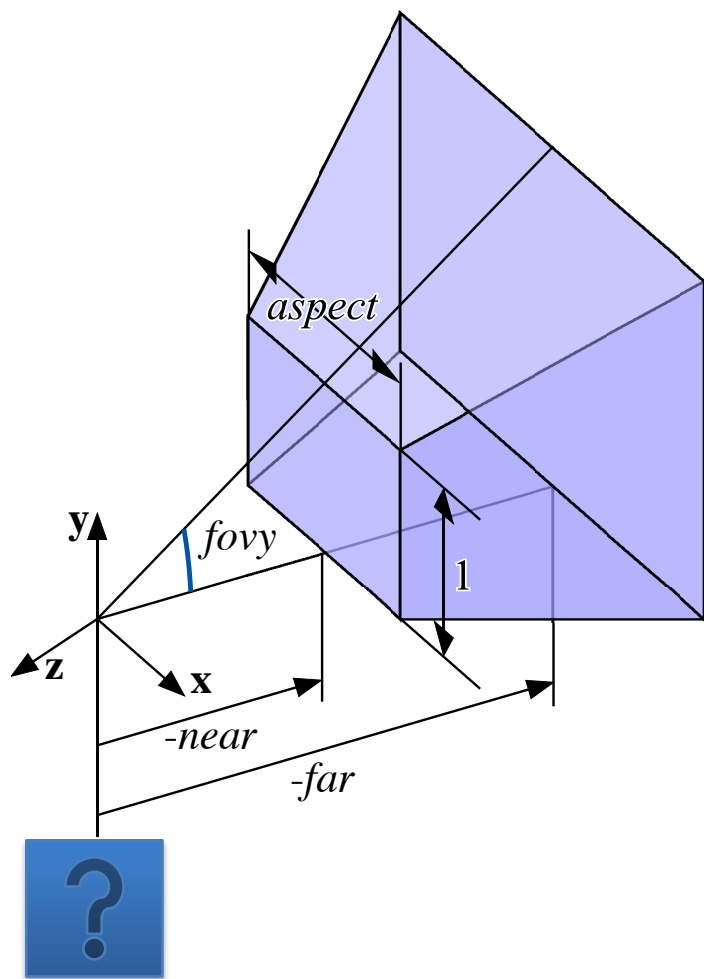
せん断

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{2}{right - left} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{top - bottom} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{far - near} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} near & 0 & 0 & 0 \\ 0 & near & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{far + near}{2} & far\ near \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{right + left}{2near} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{top + bottom}{2near} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} \frac{2near}{right - left} & 0 & \frac{right + left}{right - left} & 0 \\ 0 & \frac{2near}{top - bottom} & \frac{top + bottom}{top - bottom} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far + near}{far - near} & -\frac{2\ far\ near}{far - near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

# 透視深度



# 画角をもとにした透視投影変換行列



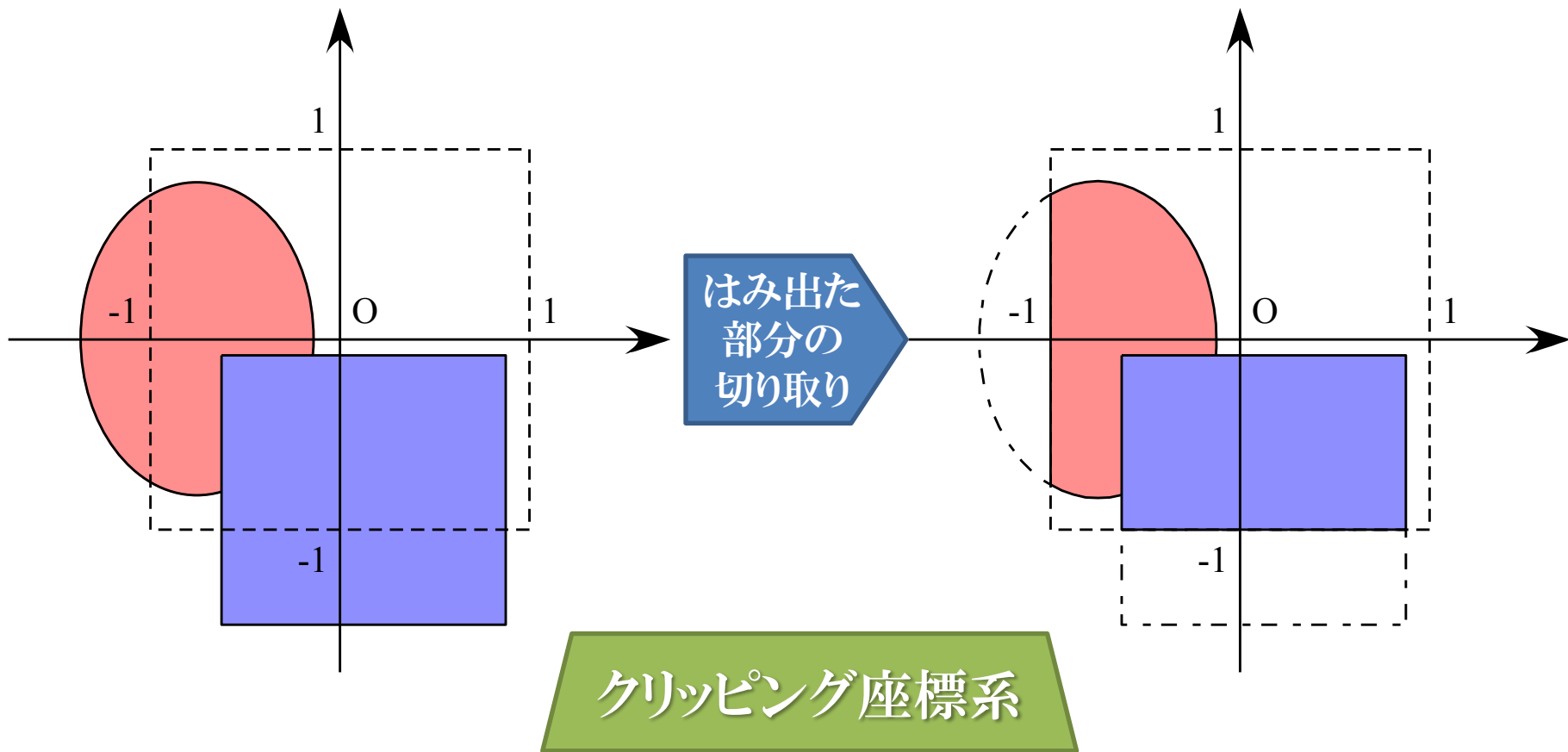
$$f = \frac{1}{\tan\left(\frac{fovy}{2}\right)}$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{f}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far + near}{far - near} & -\frac{2 far near}{far - near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

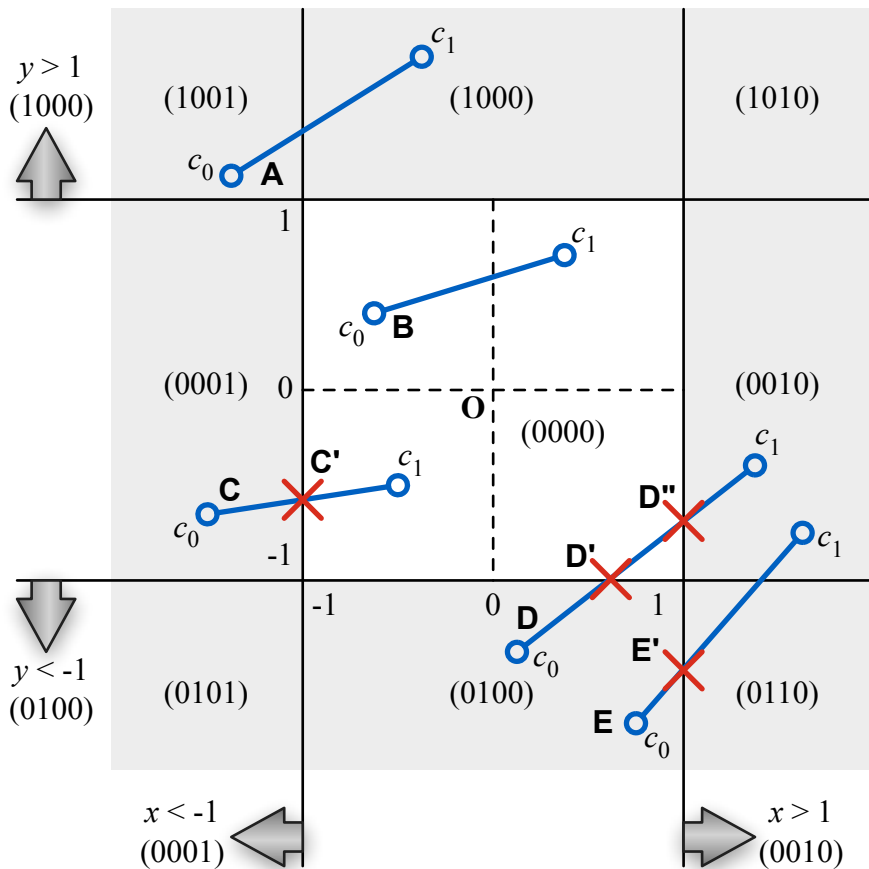
*fovy*: y 方向の画角 (field of view - fov)

*aspect*: 表示領域の縦横比

# クリッピング



# 線分のクリッピング

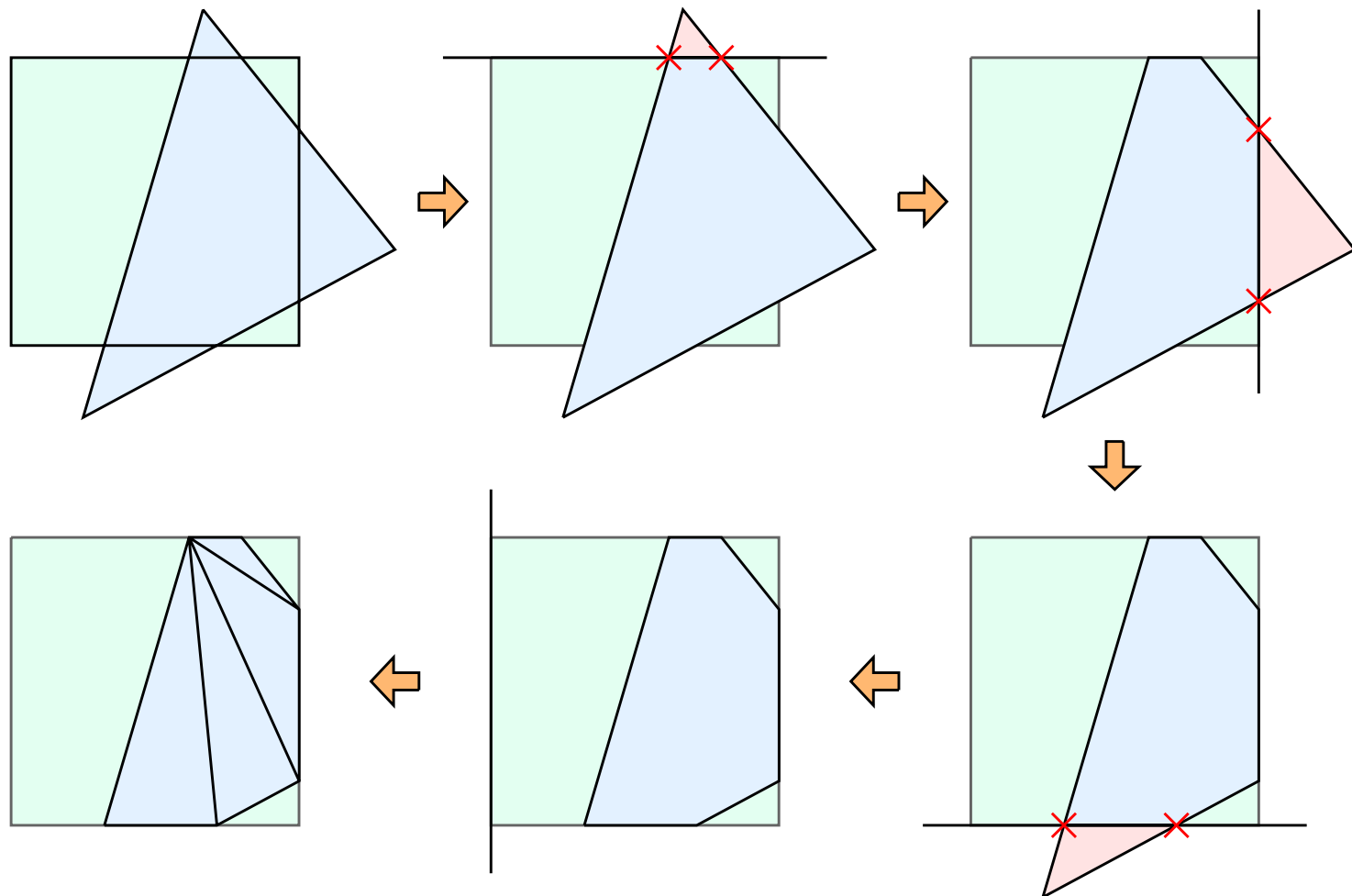


	$c_1$	$c_2$	$c_1$ and $c_2$	$c_1$ or $c_2$	処理
A	1001	1000	<u>1000</u>	1001	非表示
B	0000	0000	0000	<u>0000</u>	表示
C	0001	0000	0000	<u>0001</u>	$c_1$ 側切詰
C'	0000	0000	0000	<u>0000</u>	表示
D	0100	0010	0000	<u>0110</u>	$c_1$ 側切詰
D'	0000	0010	0000	<u>0010</u>	$c_2$ 側切詰
D''	0000	0000	0000	<u>0000</u>	表示
E	0100	0010	0000	<u>0110</u>	$c_1$ 側切詰
E'	0110	0010	<u>0010</u>	0110	非表示

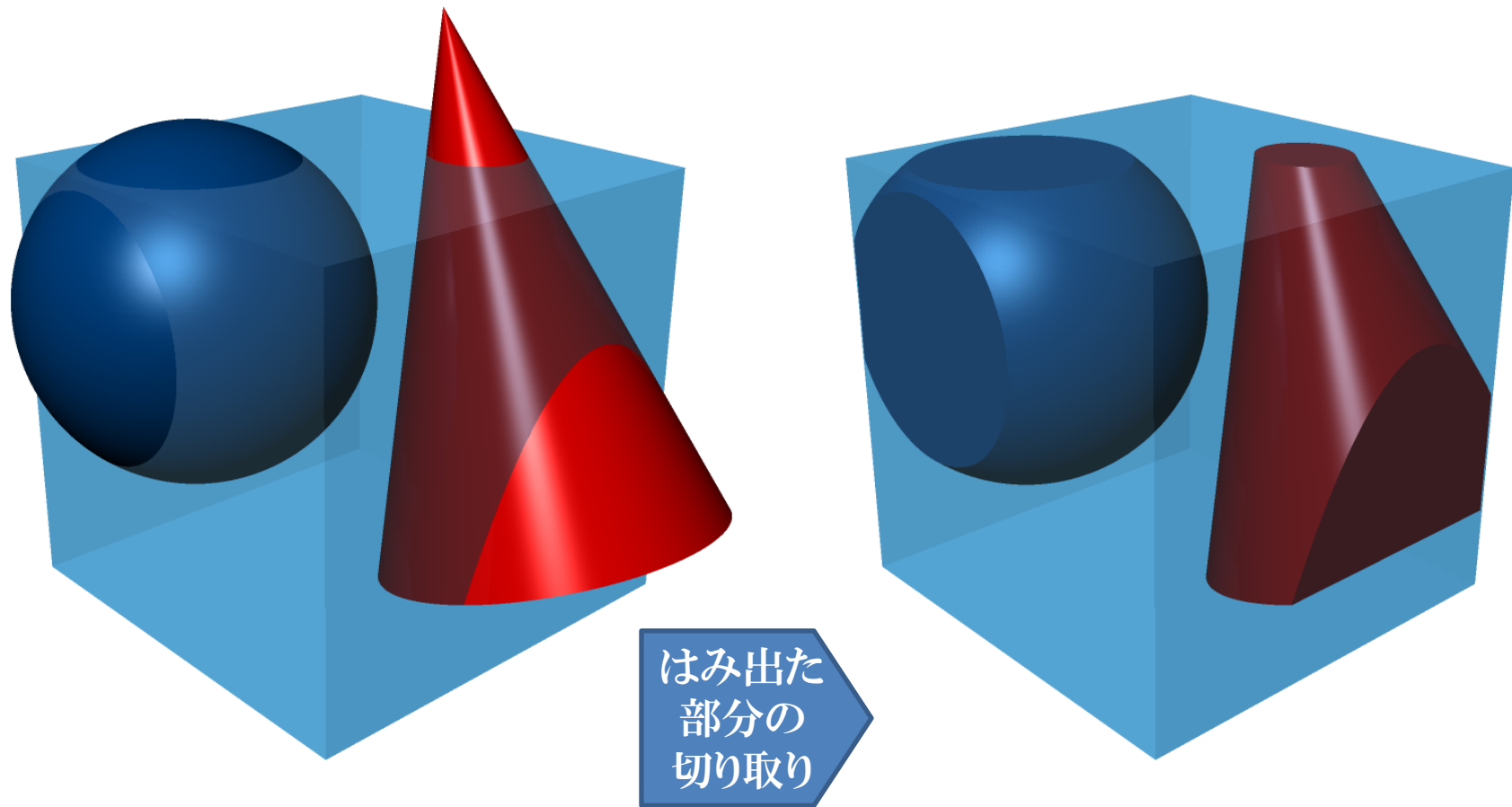
非0なら非表示

0なら表示

# 三角形のクリッピング

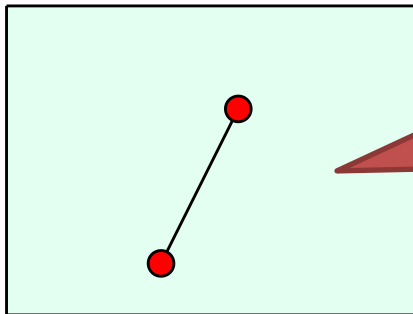
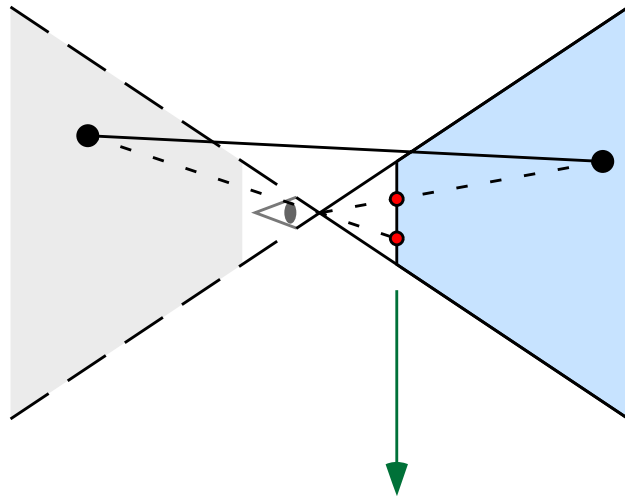


# 3次元のクリッピング

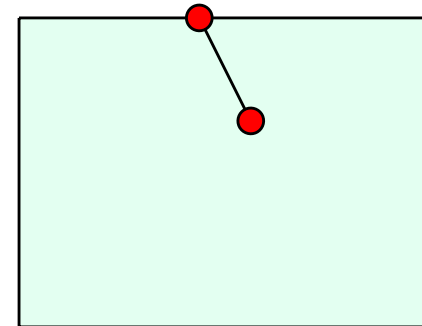
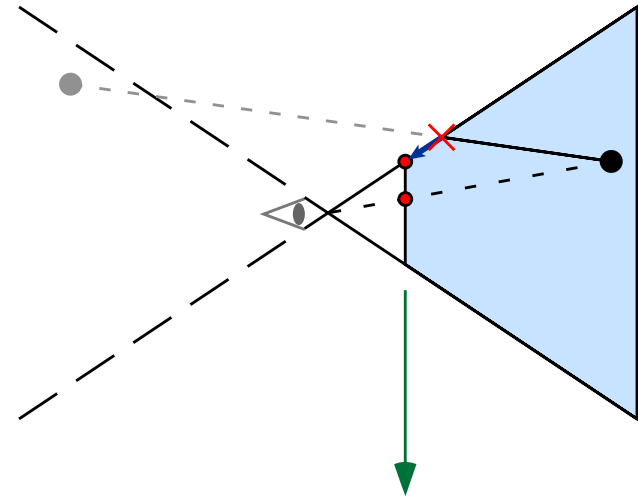


# 3次元クリッピングの必要性

端点が両方とも表示領域内



3次元クリッピング

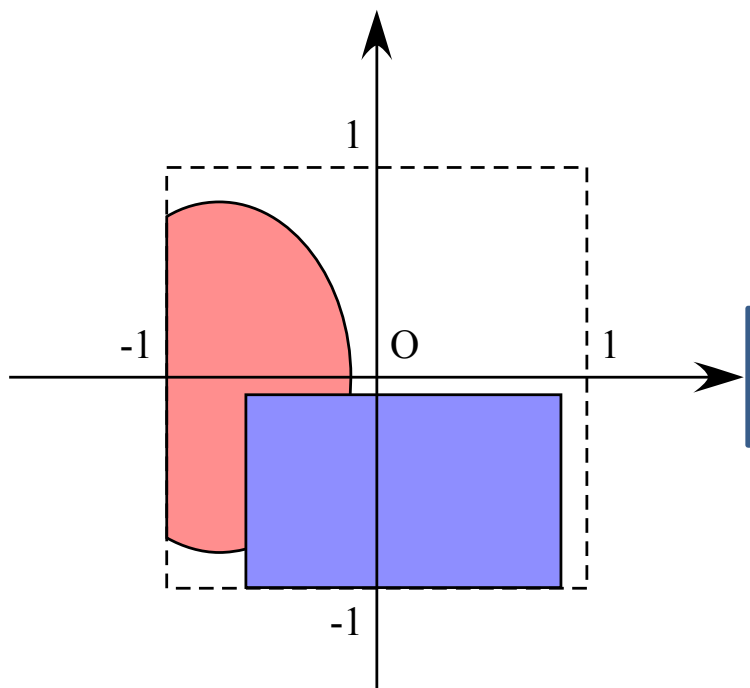


ウォークスルー  
などの際に表示  
が潰れてしまう



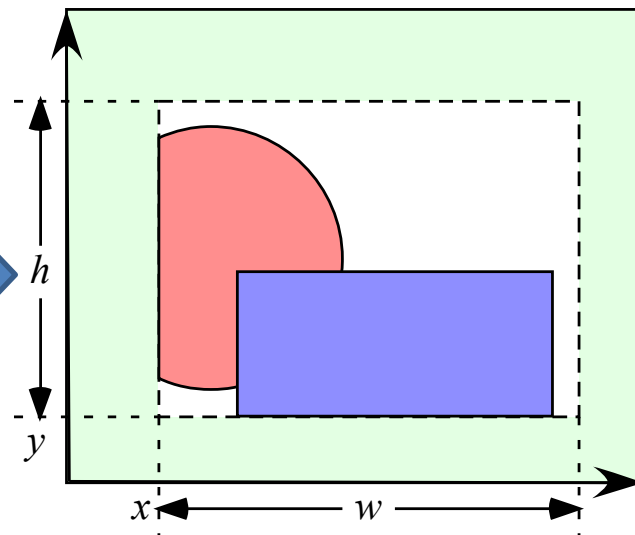
# ビューポート

- 表示装置上の表示領域



クリッピング座標系

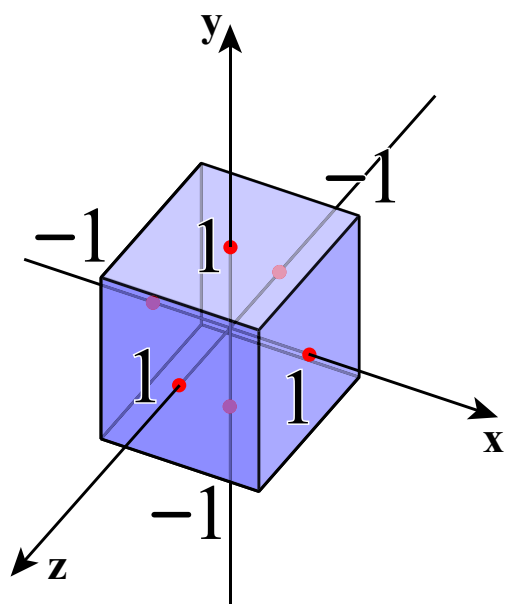
平行移動  
拡大縮小



デバイス座標系 (ビューポート)

# ビューポート変換行列

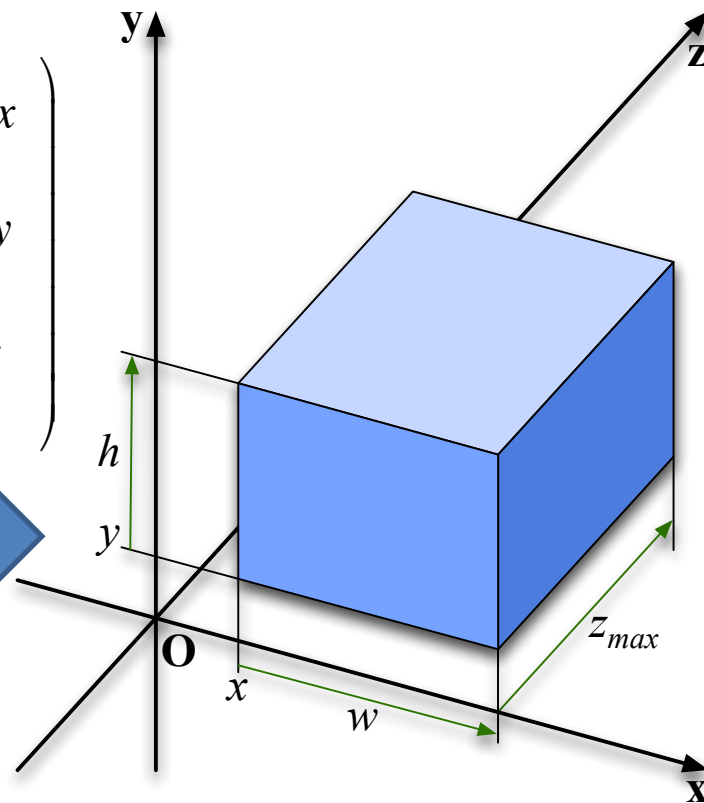
クリッピング座標系



$$\begin{pmatrix} \frac{w}{2} & 0 & 0 & \frac{w}{2} + x \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & \frac{h}{2} + y \\ 0 & 0 & \frac{z_{max}}{2} & \frac{z_{max}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

変換行列

デバイス座標系 (ビューポート)



$z_{max}$ : z 方向の表現可能な最大値

int 型なら INT\_MAX, unsigned int 型なら UINT\_MAX

おわり

# 課題

- 視点からの距離が2の位置にある前方面に画角90度で透視投影する変換行列を求めなさい
- 視点から遠方面までの距離は7とする
- 投影された図形は画面上の横400画素・縦320画素の表示領域に表示するものとする(がその形は正方形)

# 解答例

●  $fovy = 90^\circ$  ,  $f = 1 / \tan(90 / 2) = 1$

●  $aspect = 400 / 320 = 1.25$

●  $near = 2, far = 7$

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} \frac{f}{aspect} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far + near}{far - near} & -\frac{2 far near}{far - near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8 & -5.6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

