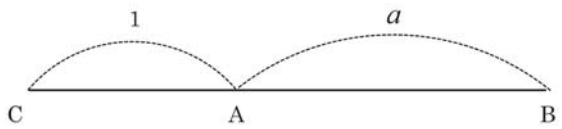
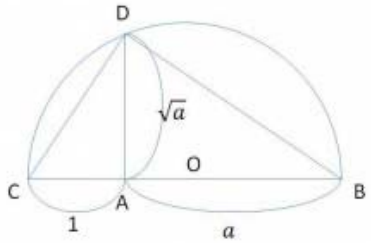
論理的思考 試験問題

2018 1.26

1. 下図のように長さ a の線分 AB と長さ１の線分 AC が一直線上につながっている。このとき、$\sqrt{a}$ を定規とコンパスを使って作図する方法を述べよ。

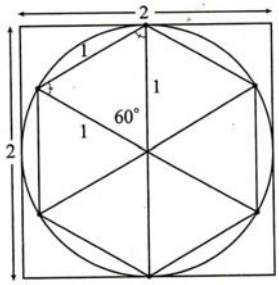


（解答例）線分 CB の中点を O とし、O を中心とする半円を描く (O は C, B を中心とする半径 r ($> \frac{1}{2}CB$) の円を描き、２つの円の交点を結んだ直線と線分 CB との交点として得られる)。次に A から CB に垂線を立て円との交点を D とする。このとき、$\triangle ACD$ と $\triangle ADB$ は相似になり、$AC : AD = AD : AB$.
よって、$AD^2 = AC \cdot AB = a$ より、$AD = \sqrt{a}$ (15 点)



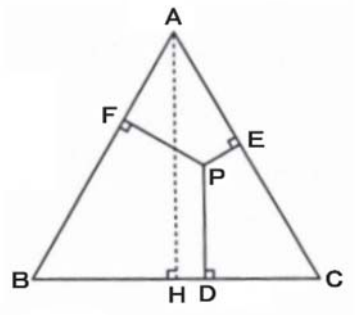
2. 円周率 π について、$3 < \pi < 4$ が成り立つことを証明せよ。但し、$\pi = 3.1415...$ である事実を使ってはいけない。

（解答例）半径１の円に内接する正６角形を考える。正６角形は一辺の長さが１の６個の正三角形から構成されるので外周の長さは６。円周の長さは正６角形の外周の長さより大きいので、$6 < 2\pi \times 1$ より $3 < \pi$. 次に円に外接する正方形を考える。正方形は一辺の長さが２なのでその面積は４。円の面積は正方形の面積より小さいので、$\pi \times 1^2 < 4$. よって、$3 < \pi < 4$ (15 点)



3. 正三角形の内部に任意の１点を置く。この点から３辺に下した３本の垂線の長さの和は、正三角形の高さに等しいことを証明せよ。

（解答例）正三角形 ABC の内部にある点を P とし、点 P から３辺 BC, CA, AB に下した垂線の足をそれぞれ D, E, F とし、点 A から辺 BC に下した垂線の足を H とする。正三角形の１辺の長さを a とすると、$\triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB = \triangle ABC$ なので、



$$\frac{1}{2}aPD + \frac{1}{2}aPE + \frac{1}{2}aPF = \frac{1}{2}aAH$$

$$\therefore PD + PE + PF = AH$$

よって、題意が成立する。(15 点)

4. ９枚の硬貨の中に１枚だけ重さが軽い偽物の硬貨がある。天秤を２回だけ使い、偽物を判別する方法を述べよ。

（解答例）(1) ９枚から６枚を選び、天秤に３枚ずつ硬貨を載せる。(2) (1) で釣り合えば残りの３枚のうち２枚を天秤にかけ、釣り合わなければ軽い方が偽物。釣り合えば残りの１枚が偽物。(3) (1) で釣り合わなければ、軽い方の３枚から２枚を選び天秤にかける。(4) 釣り合わなければ軽い方が偽物。釣り合えば残りの１枚が偽物。　(15 点)